Segunda edición

Matemáticas I

Álgebra

Enfoque por competencias

PEARSON

René Jiménez

Matemáticas I

Álgebra

Segunda edición

René Jiménez

Colegio de Bachilleres

Prentice Hall

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

Jímenez, René

Matemáticas I. Álgebra

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2011

ISBN: 978-607-32-0311-1

Área: Matemáticas

Formato: 19 × 23.5 cm Páginas: 248

Editor: Enrique Quintanar Duarte
e-mail: enrique.quintanar@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Felipe Hernández Carrasco
Supervisor de producción: Juan José García Guzmán

SEGUNDA EDICIÓN, 2011

ISBN VERSIÓN IMPRESA: 978-607-32-0311-1
ISBN VERSIÓN E-BOOK: 978-607-32-0312-8
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-0313-5
Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 13 12 11 10

Prentice Hall
es una marca de

PEARSON

www.pearsoneducacion.net

Contenido

Presentación

Este libro fue diseñado especialmente para un primer curso de **álgebra** y sus aplicaciones del nivel medio superior. El enfoque fundamental de este texto es el desarrollo de las **competencias** que deben caracterizar a un estudiante del nivel medio superior, a quien se considera como el eje principal en su preparación educativa. De esta forma, la presente obra contribuye a desarrollar los conocimientos, las habilidades, las actitudes y los valores que distinguirán al alumno al concluir el estudio de este curso y que perdurarán a lo largo de su vida.

Desde luego, el material de este libro servirá como antecedente básico de cursos posteriores de matemáticas, pero además agregará valor a la calidad educativa del estudiante al momento de vincularse con las demás áreas del conocimiento con la intención de dar por resultado una formación integral.

Otro objetivo de gran relevancia de este material es el de apoyar y facilitar la gran tarea que realizan los docentes durante el curso para desarrollar una mejor planeación de los materiales didácticos en función del tiempo y de las necesidades institucionales y sociales, en el marco de las teorías educativas que se proponen elevar la calidad educativa de nuestros alumnos. Este libro, sin duda, ayudará tanto a los profesores como a los alumnos a cosechar los mejores frutos de su trabajo.

El libro propone en cada lección actividades que se pueden llevar a cabo de manera individual o con trabajo colaborativo. Se pretende además que el estudiante asuma una actitud analítica, reflexiva, crítica y de investigación para integrarse de una mejor manera a su entorno y a la educación superior.

El contenido de la obra se distribuye en diez bloques, como lo establece el programa de Matemáticas I del bachillerato general. Cada bloque inicia con una propuesta didáctica que motiva a los estudiantes y a sus maestros a generar un ambiente de análisis y reflexión que dará la pauta para que tanto unos como otros se den cuenta de la posición académica que ocupan en ese momento con respecto a conocimientos previos y a las competencias que habrán de desarrollar.

Los temas se exponen en función de actividades constructivistas para que los maestros y los alumnos, o bien, los alumnos entre sí interactúen y discutan la pertinencia de los contenidos.

Al final de cada bloque se sugieren actividades con estrategias didácticas que permitirán tanto al maestro como a los alumnos reafirmar lo aprendido.

Competencias

El contenido del presente texto tiene como propósito fundamental desarrollar en los estudiantes las siguientes competencias.

Competencias genéricas

El estudiante:

- Se conoce y se valora a sí mismo, y enfrenta problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
- Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
- Elige y practica estilos de vida saludables.
- Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
- Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica.
- Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
- Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
- Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
- Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

Competencias disciplinares

El estudiante:

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y el análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los compara con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida en un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y compara experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Evaluación diagnóstica

Encuentra la solución para cada una de las siguientes propuestas y anótala en la columna de la derecha.

Propuesta	Solución
1. Escribe el equivalente de $\frac{11}{5}$ en forma decimal.	
2. Reduce $\frac{27}{54}$ a su mínima expresión.	
3. Escribe -9 como una fracción con denominador 1.	
4. Resuelve $5\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}$.	
5. Encuentra el resultado de $3\frac{1}{2}\div\frac{5}{4}$.	
6. Resuelve $\frac{5}{3}-\frac{3}{5}$.	
7. Encuentra el resultado de $5\frac{1}{2}+\frac{3}{5}$.	
8. Escribe 52.354 en forma expandida.	
9. Escribe 5.21 como fracción reducida.	
10. Suma $535.42 + 27.832$.	
11. Resta $341.23 - 128.90$.	
12. Multiplica 4.27×1.26.	
13. Divide $\frac{12.356}{4.31}$.	

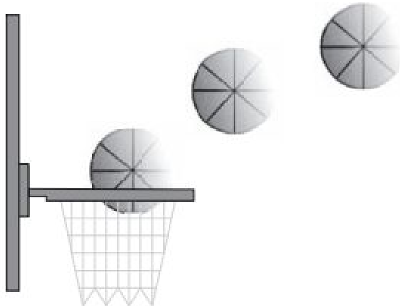
(*Continuación*)

14. Escribe 65.1% como decimal.	
15. Escribe 0.25 como porcentaje.	
16. Escribe $\frac{5}{8}$ como porcentaje.	
17. Escribe 25% como fracción.	
18. Encuentra una fracción equivalente a $\frac{20}{25}$ con denominador 5.	
19. Encuentra el resultado de $9 + (-5)$.	
20. Simplifica $9 - 5x - 3$.	

Matemáticas I

BLOQUE

1 Problemas aritméticos y algebraicos



Unidades de competencia

En este bloque se pretende que el alumno desarrolle las siguientes competencias:

- Construir e interpretar modelos aritméticos, algebraicos y gráficos aplicando las propiedades de los números positivos y las expresiones aritméticas y algebraicas, relacionando magnitudes constantes y variables, y empleando literales para la representación y resolución de situaciones y/o problemas aritméticos y algebraicos concernientes a su vida cotidiana y escolar, los cuales le ayudarán a explicar y describir su realidad.
- Identificar las características presentes en tablas, gráficas, mapas, diagramas o textos, provenientes de situaciones cotidianas, y traducirlas a un lenguaje aritmético y/o algebraico.

Conocimientos

Al finalizar este bloque, el alumno habrá adquirido los conocimientos que le permitirán:

- Identificar formas distintas de representación de números positivos.
- Identificar números decimales en distintas formas (enteros, fracciones, porcentajes).
- Jerarquizar operaciones numéricas al ejecutarlas.
- Identificar y reconocer números reales y variables algebraicas.
- Identificar formas distintas de representación de números reales.
- Calcular el valor numérico de una expresión algebraica.

Habilidades

Al finalizar este bloque, el alumno habrá desarrollado las habilidades que le permitirán:

- Realizar operaciones aritméticas, siguiendo una jerarquía en el orden de ejecución.
- Utilizar números decimales en forma de enteros, fracciones y porcentajes.
- Emplear expresiones numéricas para representar relaciones.
- Utilizar la calculadora como herramienta de exploración de resultados.
- Emplear expresiones algebraicas, usando literales, para representar relaciones entre las magnitudes.
- Establecer significados y propiedades de las diferentes representaciones de los números y las variables algebraicas.
- Utilizar los sistemas y las reglas o principios medulares que subyacen en una serie de fenómenos relacionados con los números y las variables.
- Describir expresiones verbales mediante formas algebraicas, y viceversa.

Actitudes y valores

Al finalizar este bloque, el alumno:

- Apreciará la utilidad de los números positivos y las literales para modelar y/o solucionar problemas.
- Mostrará disposición para utilizar el cálculo numérico al resolver problemas cotidianos.
- Aportará puntos de vista personales con apertura y considerará los de otras personas al reflexionar sobre sus procesos de aprendizaje.

Indicadores de desempeño

Se pretende que el alumno logre:

- Calcular porcentajes, descuentos e intereses en diversas situaciones.
- Emplear la calculadora como instrumento de exploración y verificación de resultados.
- Representar relaciones numéricas y algebraicas entre los elementos de situaciones dadas.
- Interpretar modelos aritméticos y algebraicos de situaciones diversas, con números positivos.
- Solucionar problemas aritméticos y algebraicos relacionados con su vida cotidiana.

Propuesta de aprendizaje

Los precios de los combustibles Magna, Premium y Diesel son $8.35, $10.25 y $6.05, respectivamente. Cuando se abastece un vehículo, la pantalla de la máquina surtidora indica una venta de $525.50 y un suministro de 62.93 litros. Con esta información, ¿qué clase de combustible cargó el vehículo?

Actividad de investigación

- ✓ Investiga y comenta con tus compañeros los precios de los combustibles en tu comunidad y la variabilidad de éstos.
- ✓ ¿Cómo es la situación de México en términos de dependencia o independencia económica en materia de hidrocarburos?
- ✓ ¿Qué alternativas energéticas hay en nuestro país para sustituir los hidrocarburos?

Propuesta de aprendizaje

El peso de un astronauta sobre la Luna equivale a $\frac{1}{6}$ de su peso sobre la Tierra. ¿Cuánto pesará en nuestro satélite un astronauta que en la Tierra tiene un peso de 92 kilogramos?

Autoevaluación

La tabla que aparece a continuación indica el estado civil de 26,000 personas entrevistadas, y se pretende escribir los resultados en cifras porcentuales. Por ejemplo, el primer renglón indica que del total de personas entrevistadas, 12,740 eran solteras, es decir,

$$\frac{12,740}{26,000} = 0.49 = 49\%$$

Realiza las operaciones necesarias y llena los espacios que faltan en la tabla.

Estado civil	Números	Porcentajes
Solteros	12,740	49%
Casados por primera vez	7,800	
Casados más de una vez	1,300	
Divorciados o separados	2,860	
Viudos	260	
Unión libre	1,040	

Números positivos y su representación

Como habrás observado, en las actividades anteriores se utilizaron sólo *números positivos* y el *cero*. Pero, además, están escritos en el sistema decimal; por esta razón, a todos se les llama *números decimales* y pueden expresarse como *enteros, fracciones o porcentajes.*

Enteros: 92 12,740 7,800

Fracciones: 525.50, 62.93, $\frac{1}{6}$

Porcentajes 49%

Un número recibe su nombre por la forma en que esté escrito. Así, tenemos que

0.49 se llama *fracción decimal.*

$\frac{1}{6}$ se llama *fracción común.*

49% se llama *porcentaje.*

Conversión de fracciones

Para convertir *fracciones comunes* a *fracciones decimales* basta efectuar la división correspondiente. Para ello, puedes utilizar tu calculadora.

$$\frac{1}{4}=0.25 \qquad \frac{3}{5}=0.6\,, \qquad \frac{1}{3}=0.3333..., \qquad \frac{5}{6}=0.8333...$$

Las fracciones como $\frac{1}{3}=0.3333...$ y $\frac{5}{6}=0.8333...$ se llaman *periódicas* porque, como observarás, se repite un número decimal.

Las fracciones decimales periódicas generalmente se escriben con una pequeña raya sobre el número que se repite:

$$0.333...=0.\overline{3} \qquad 0.8333...=0.8\overline{3}$$

Si la conversión es de una *fracción decimal* a una *fracción común*, escribimos como numerador el decimal sin el punto y como denominador la unidad fraccionaria que corresponda a la fracción decimal dada. Por último, se simplifica la fracción común:

$$0.2=\frac{2}{10}=\frac{1}{5} \qquad 0.25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4} \qquad 0.125=\frac{125}{1{,}000}=\frac{1}{8}$$

Para convertir una fracción decimal periódica en fracción común se procede de la siguiente manera:

Ejemplo:

Convierte $0.3333... = 0.\overline{3}$ en fracción común.

Solución:

$x = 0.333...$	Se designa con x la fracción periódica.
$10x = 3.333...$	Se multiplican por 10 ambos lados de la igualdad.
$\begin{array}{r} 10x = 3.333 \\ -\ x = 0.333 \\ \hline 9x = 3 \end{array}$	Se resta la primera igualdad de la segunda.
$x = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$	Se despeja x y se simplifica la fracción.

Ejemplo:

Convierte $0.8333... = 0.8\overline{3}$ en fracción común.

Solución:

$x = 0.8333...$	Se designa con x la fracción decimal.
$10x = 8.333...$	Se convierte la fracción mixta en fracción pura.
$100x = 83.333...$	Se multiplican por 10 ambos lados de la igualdad.
$\begin{array}{r} 100x = 83.333... \\ -10x = 8.333... \\ \hline 90x = 75 \end{array}$	Se resta la primera igualdad de la segunda.
$x = \dfrac{75}{90} = \dfrac{5}{6}$	Se despeja x y se simplifica la fracción.

Para convertir porcentajes como 25%, procedemos a escribirlo como $\frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0.25$, lo cual se lee como 25 por ciento o 25 centésimos.

Jerarquía (orden) de las operaciones numéricas

Las operaciones básicas que nos permiten hacer cálculos numéricos en matemáticas y combinar los números se llaman: *adición* (+), *sustracción* (−), *multiplicación* (×), *división* (÷). Para realizar correctamente las operaciones matemáticas, es necesario jerarquizar su operatividad de la siguiente manera:

1. Se realizan las operaciones que están entre paréntesis de adentro hacia afuera.
2. Se evalúan todos los exponentes.
3. Se realizan las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
4. Finalmente, se ejecutan la suma y la resta, también de izquierda a derecha.

Ejemplo:

Cálculo de expresiones numéricas.
Calcula el valor de las siguientes expresiones matemáticas.

a) $5 - 2 + (7 \times 3)$

b) $[21 - (4 + 2) - 5] \div 2$

Solución:

a) $5 - 2 + (7 \times 3) = 5 - 2 + 21$ Primero, se multiplica 7×3.

$= 24$ Se resta y se suma.

b) $[21 - (4 + 2) - 5] \div 2 = [21 - 6 - 5] \div 2$ Se suma 4 + 2 y se elimina el paréntesis.

$= 10 \div 2$ Se restan 6 y 5 de 21.

$= 10$ Se divide 10 entre 2.

Ejemplo:

Relación de horas de trabajo.
Los profesores estadounidenses laboran en promedio $20\frac{1}{2}$ horas a la semana, mientras que los mexicanos $28\frac{3}{4}$ horas. ¿Qué porcentaje de horas trabajan los profesores estadounidenses en comparación con los profesores mexicanos?

Solución:

$$20\tfrac{1}{2} = 20.5 \quad \text{y} \quad 28\tfrac{3}{4} = 28.75 \quad \text{Convertimos las fracciones.}$$

Para encontrar el porcentaje, dividimos el número de horas que trabajan los profesores estadounidenses entre el número de horas que laboran sus colegas mexicanos.

$$\textit{Porcentaje} = \frac{20.5}{28.75} = 0.7130 = 71.30\%$$

Los profesores estadounidenses laboran un 71.30% de la jornada laboral de los profesores mexicanos.

Ejemplo:

Cálculo de intereses.
Una institución financiera ofrece crédito a sus clientes con una tasa de interés del 2.3% mensual fija.

a) ¿Cuál es la tasa de interés anual?

b) Si el impuesto al valor agregado (IVA) sobre los intereses es del 15%, ¿a cuánto asciende el costo anual total (CAT)?

c) ¿Cuánto dinero hay que pagar en un año por un préstamo de $112,000?

Solución:

a) Tasa anual = (2.3%)(12) = 27.6% = 0.276

b) *CAT* = tasa anual + 15% de la tasa anual

$$= 0.276 + (0.276)(0.15) = 0.3174 = 31.74\%$$

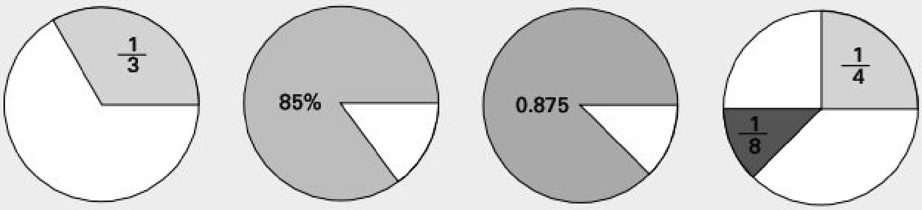
c) Pago total = $112,000 + 31.74% de los $112,000

$$= \$112,000 + (\$112,000)(0.3174) = \$147,548.80$$

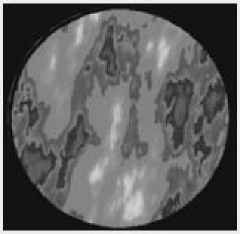
Evidencias de aprendizaje

1. Habilidades. Efectúa las operaciones necesarias y completa la tabla llenando los espacios vacíos.	
a) La fracción $\frac{7}{8}$ en forma decimal es equivalente a	
b) Representa 0.250 en porcentaje.	
c) ¿Cómo se escribe 35% en forma decimal?	
d) Representa 75% en fracción común.	
e) Escribe la fracción $0.666... = 0.\overline{6}$ como fracción común.	
f) Escribe la fracción $0.1666... = 0.\overline{6}$ como fracción común.	
g) Obtén el valor de la expresión $5 + 3(12 - 5) - 11$.	
h) Calcula el valor de la expresión $3[(7 - 2) + 4] - 8$.	
i) Encuentra el valor de la expresión $9 \div 3^2 - 8 + 5$.	
j) Calcula el valor de la expresión $4 \times 8 \div 2 - 3\,(4 - 2) + 9 \div 3$.	
k) 100 kilómetros por hora en metros por segundo es	
l) ¿A cuánto equivalen 2 litros en cm^3?	

2. Escribe la fracción equivalente que aparece en blanco en cada círculo.



3. El área total de la Tierra es de $5.098870 \times 10^6\ km^2$. Si el 70.8% de la superficie está cubierto por agua, calcula la cantidad de kilómetros cuadrados que esto representa.



4. Una institución financiera ofrece crédito a sus clientes con una tasa de interés del 2.3% mensual fija. Calcula la cantidad que va a pagar un cliente en un año por un crédito de $100,000 si en la tasa de interés no está incluido el 15% de impuesto.

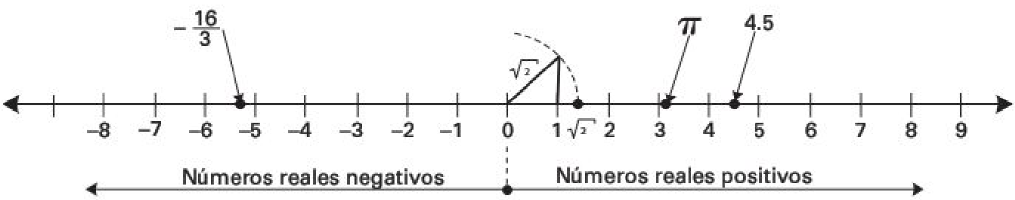
Actividad de investigación

Consulta los datos propuestos a continuación:

1. La elevación sobre el nivel del mar del Monte Everest.
2. La profundidad bajo el nivel del mar del Mar Caspio.
3. La temperatura de congelación del agua en grados Fahrenheit.

Números reales

Los *números reales* son todos los números que conocemos y que podemos asociar con los puntos gráficos de una recta llamada *recta numérica*. Dichos puntos se dividen en *positivos y negativos* según estén a la *derecha o izquierda*, respectivamente, de un punto que llamamos origen y que corresponde al cero.



Representación o clasificación de los números reales. Los números reales se pueden clasificar de la siguiente manera:

Números naturales. Son los enteros positivos que utilizamos desde que aprendimos a contar de forma intuitiva o natural.

$$1, 2, 3, \ldots$$

Números enteros. Son los números enteros negativos, el cero y los enteros positivos.

$$\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Números racionales. Son números reales de la forma $\frac{a}{b}$ donde a y b son enteros y $b \neq 0$. Las representaciones decimales de los números racionales pueden ser finitas o no finitas y repetitivas. Por ejemplo, al realizar la división de los siguientes números, tenemos que

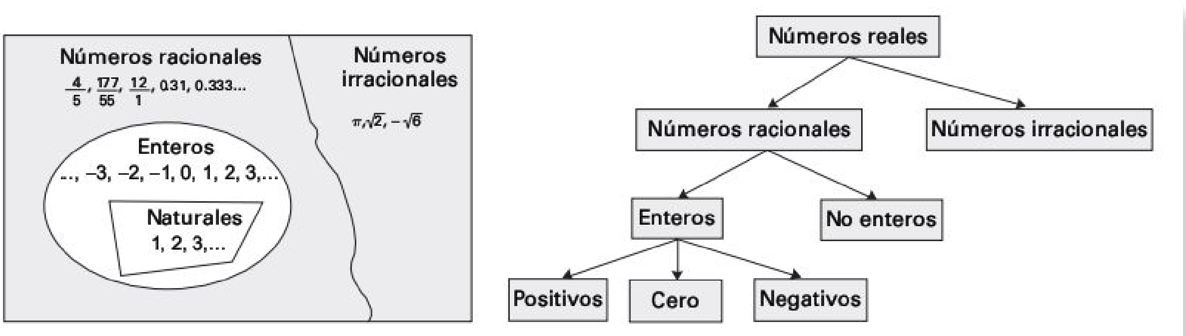
$$\frac{4}{5} = 0.8, \qquad \frac{12}{1} = 12, \qquad \frac{177}{55} = 3.2181818\ldots,$$

donde los dígitos 1 y 8 en la representación $\frac{177}{55}$ se repiten en forma indefinida.

Números irracionales. Son números como $\sqrt{2} \approx 1.4142$ o $\pi \approx 3.1416$ que no son racionales, es decir, que no se pueden expresar como cociente de dos enteros. No existe un número racional alguno tal que $a^2 = 2$, pero sí existe un irracional como $\sqrt{2}$, tal que $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

Números primos. Un entero positivo p diferente de 1 es número primo si sus únicos factores positivos son 1 y p. Por ejemplo, son números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,…

Representación gráfica de los números reales



Ejemplo:

Clasifica cada número real como natural, entero, racional, o irracional:

a) -5, *b*) 0, *c*) 0.25, *d*) $\sqrt{2}$ *e*) 0.101001000 *f*) 0.101001000…

Solución:

Número	Clasificación
a) -5	Entero negativo y racional
b) 0	Entero y racional
c) 0.25	Decimal y racional
d) $\sqrt{2}$	Irracional
e) 0.101001000	Racional
f) 0.101001000…	Irracional

Ejemplo:

Utiliza números reales para representar las siguientes cantidades:

a) La temperatura mínima de 6.7 grados centígrados *bajo cero* registrada en San Juanito, Chihuahua, México, en el año 2009.

b) La fecha de nacimiento de una persona registrada 120 años a. C.

c) La altitud del Monte Everest de 8,848 metros sobre el nivel del mar.

Solución:

a) 6.7°C *b*) -120 *a.C.* *c*) $+8{,}848\ m$

Evidencias de aprendizaje

1. Conocimientos. Clasifica cada número real como entero, racional o irracional.			
Número	**Clasificación**	**Número**	**Clasificación**
a) $\sqrt{21}$		*c*) 0.333…	
b) -2		*d*) 29	

2. Conocimientos. Determina si la proposición es verdadera (**V**) o falsa (**F**) escribiendo la letra correspondiente en la celda de la derecha.	
a) Todo número entero es racional.	
b) Un decimal que no se repite y no termina es un número real.	
c) Todo número racional es un entero.	
d) Todo decimal que no se repite y no termina es irracional.	
e) La representación decimal de un número real nunca termina y nunca se repite.	

3. Conocimientos. Utiliza números reales para escribir las cantidades dadas.	
a) La *ganancia* de $20 millones de una empresa.	
b) La profundidad de 400 metros del Mar Muerto *bajo el nivel* del mar.	
c) La temperatura de 5 grados *bajo cero* en Ciudad Madera, Chihuahua, México.	
d) La *pérdida* de $20,000 de un inversionista.	

Variables y expresiones algebraicas

Aunque es probable que ya estés familiarizado con las expresiones algebraicas, vamos a señalar de nuevo que, para representar las cantidades, en álgebra se utilizan *números y letras*, a diferencia de la aritmética, que sólo utiliza números.

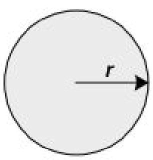
Las **variables algebraicas** son expresiones que sirven para representar los cambios de valor que pueden adquirir las cantidades en un proceso de análisis.

Una **expresión algebraica** es la consecuencia de la generalización que hace el álgebra al utilizar letras y números, al tiempo que representa las cantidades y las operaciones entre éstas; también suelen llamarse *fórmulas algebraicas.*

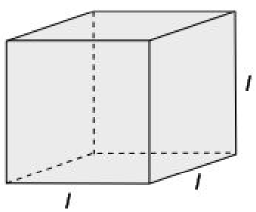
Ejemplos:

Expresión simbólica	Enunciado verbal
$2x^2$	Representa una regla que eleva al cuadrado una cantidad y la multiplica por 2.
$b\times h$	Es el producto de dos cantidades.
x^3	El cubo de una cantidad.
$(a+b)^2$	La suma de dos cantidades elevada al cuadrado.
$(x+y)(x-y)$	El producto de la suma por la resta de dos cantidades.
$\sqrt{x}$	La raíz cuadrada de una cantidad.
$\dfrac{a}{b}$	La división de dos cantidades.

Las expresiones algebraicas nos sirven para representar áreas o volúmenes, procesos económicos, comportamientos de la naturaleza, y muchos otros fenómenos y situaciones, como estudiaremos más adelante.

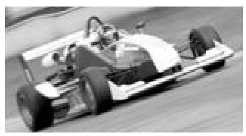


Área $= \pi r^2$



Volumen $= l^3$

Velocidad de un móvil



$v = \dfrac{s}{t}$

Intereses devengados por un capital

$A = P(1+i)^n$

Valor numérico de una expresión algebraica

Cuando en una expresión algebraica sustituimos las variables por números y efectuamos las operaciones correspondientes, lo que estamos haciendo es calcular el *valor numérico de la expresión*.

Ejemplo:

Si se invierten P dólares al r por ciento, la cantidad de dinero A al término de un año es

$$A = P(1+r).$$

¿Cuánto dinero se acumulará al final del año, si la inversión inicial P es de \$1,000 a una tasa de interés r del 4.2%?

Solución:

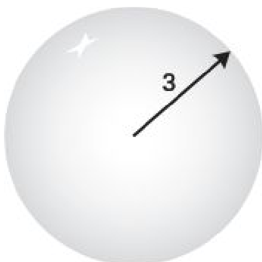
Si en la expresión $A = P(1+r)$ sustituimos P por 1,000, y r por 0.042, obtenemos el valor numérico de A:

$$A = 1{,}000(1+0.042) = 1{,}042 \text{ dólares}$$

Ejemplo:

La fórmula para calcular el volumen de una esfera es

$$V = \frac{1}{3}\pi\, r^3$$



Encuentra el volumen de una esfera de radio 3.

Solución:

$$V = \frac{1}{3}\pi\,(3)^3 = 9\pi$$ Sustituimos r por 3.

Ejemplo:

La conversión de grados centígrados a grados Fahrenheit se realiza mediante la fórmula:

$$°F = \frac{9}{5}\ °\mathrm{C} + 32$$

Convierte 30°C a la escala Fahrenheit.

Solución:

$$°F = \frac{9}{5}(30°\mathrm{C}) + 32 = 86°\mathrm{C}$$

Evidencias de aprendizaje

1. Habilidades. Traduce los siguientes enunciados en expresiones algebraicas.

Enunciado	Expresión
a) La suma de $3x$ y 7.	
b) Tres cuartos de una cantidad x menos 5.	
c) Una cantidad y disminuida por 2 más 5 veces la cantidad.	
d) La suma de p y q dividida entre la diferencia de p y q.	
e) El área A de un rectángulo es el producto de su base b por su altura h.	
f) La superficie S de una esfera de radio r.	
g) El cociente de x entre la suma de a más b.	
h) El voltaje V de un circuito eléctrico es el producto de la corriente I por su resistencia R.	
i) La presión P de un fluido en un recipiente es la fuerza F que ejerce sobre el área A.	
j) La utilidad total P_t es igual al ingreso total R_t menos el costo total C_t.	
k) La temperatura Celsius (C) es cinco novenos de la resta de los grados Fahrenheit (F) menos treinta y dos.	

2. Sustituye el valor de las variables dadas para calcular el valor de cada una de las expresiones algebraicas correspondientes.

Enunciado	Expresión	Valor
a) Cantidad de dinero A acumulado al final del año de un capital $P = \$1{,}520$ con una tasa de interés $r = 10\%$ anual.	$A = P(1 + r)$	$A =$
b) La equivalencia de 100 grados centígrados en grados Fahrenheit.	$°F = \frac{9}{5}°C + 32$	$°F =$
c) El volumen de un cubo con lados de 5 centímetros.	$V = l^3$	$V =$
d) El desplazamiento s de un móvil que se desplaza con una velocidad constante $v = 100$ m/s en un tiempo t de 10 segundos.	$s = vt$	$s =$
e) El radio r de un círculo de perímetro $P = 100$ centímetros.	$r = \frac{P}{2\pi}$	$r =$
f) La hipotenusa h de un triángulo rectángulo cuyos catetos a y b miden 3 y 4 respectivamente.	$h = \sqrt{a^2 + b^2}$	$h =$

AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 1

Considera tu desempeño como estudiante e indica la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

☹ **0** Nunca ☺ **5** Algunas veces ☺ **10** Siempre

CONOCIMIENTOS Después de estudiar el bloque, ¿adquiriste los conocimientos que te permiten	
• identificar los números positivos en sus diferentes formas?	
• identificar los números decimales en sus diferentes formas?	
• jerarquizar las operaciones numéricas?	
• identificar los números reales y las variables algebraicas?	
• calcular el valor numérico de una expresión algebraica?	

HABILIDADES Al finalizar el bloque, ¿desarrollaste las habilidades que te permiten	
• realizar operaciones aritméticas siguiendo su jerarquía?	
• utilizar números decimales en sus diferentes formas?	
• emplear expresiones numéricas para representar relaciones?	
• utilizar en tu curso la calculadora como herramienta?	
• emplear expresiones algebraicas para representar relaciones?	
• establecer significados de las propiedades de los números y las variables?	
• construir y aplicar modelos aritméticos sencillos?	
• utilizar los sistemas y las reglas de los números y las variables?	
• describir expresiones verbales con formas algebraicas y viceversa?	

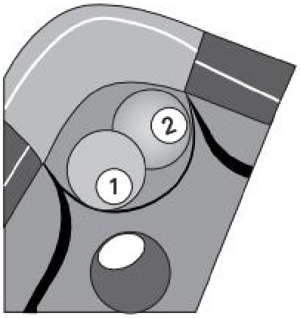
CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 0.71. El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte respecto a las **actitudes y** los **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás al estudiar el tema.

BLOQUE

2 Magnitudes y números reales



Unidades de competencia

En este bloque se pretende que el alumno desarrolle las siguientes competencias:

- Construir e interpretar modelos aritméticos, algebraicos y gráficos aplicando las propiedades de los números positivos y las expresiones aritméticas y algebraicas, relacionando magnitudes constantes y variables, y empleando literales para la representación y resolución de situaciones y/o problemas aritméticos y algebraicos concernientes a su vida cotidiana y escolar, los cuales le ayudarán a explicar y describir su realidad.
- Identificar las características presentes en tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos, provenientes de situaciones cotidianas, y traducirlas a un lenguaje aritmético y/o algebraico.

Conocimientos

Al finalizar este bloque, el alumno habrá adquirido los conocimientos que le permitirán:

- Identificar distintas formas de representación y operaciones con números reales.
- Identificar los elementos de los subconjuntos de los números reales.
- Ubicar en la recta numérica los números reales y sus simétricos, valor absoluto y relaciones de orden.
- Reconocer las propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas.
- Identificar distintas formas de comparación y relación entre números reales, tales como razones, tasas, proporciones y variaciones.

- Comprender el significado de razón, tasa y proporción.
- Interpretar la propiedad fundamental de las proporciones.
- Reconocer variaciones directas e inversas, así como modelos de variación proporcional directa e inversa.
- Calcular el valor numérico de una expresión algebraica.

Habilidades

Al finalizar este bloque, el alumno habrá desarrollado las habilidades que le permitirán:

- Realizar operaciones con números reales utilizando las propiedades fundamentales.
- Construir hipótesis y diseñar o aplicar modelos aritméticos y/o algebraicos con números reales.
- Emplear las propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas en la resolución de problemas tipo.
- Utilizar razones, tasas, proporciones y variaciones.
- Aplicar la propiedad fundamental de las proporciones.
- Utilizar modelos de variación proporcional directa o inversa.
- Utilizar los sistemas y las reglas o principios medulares que subyacen en una serie de fenómenos que implican razones, proporciones y tasas.

Actitudes y valores

Al finalizar este bloque, el alumno:

- Aportará puntos de vista con apertura y considerará los de otras personas de manera reflexiva.
- Promoverá el diálogo como mecanismo para la resolución de conflictos.
- Valorará la importancia de los números reales para expresar todo tipo de magnitudes (variables, constantes, discretas o continuas).
- Apreciará la utilidad de los modelos matemáticos para describir situaciones donde las magnitudes mantienen relaciones de variación proporcional, ya sea directa o inversa.

Indicadores de desempeño

Se pretende que el alumno logre:

- Operar diferentes representaciones de los números reales.
- Usar las tecnologías de la información y la comunicación como herramientas de apoyo en su trabajo.
- Emplear expresiones numéricas para representar relaciones entre magnitudes constantes.
- Utilizar expresiones algebraicas para representar relaciones entre magnitudes espaciales variables.
- Asignar significados a las expresiones en función de situaciones aritméticas o algebraicas que representan.

Propuesta de aprendizaje

El lugar geométrico de una recta numérica correspondiente a $\sqrt{2}$ se puede hallar utilizando el teorema de Pitágoras y dibujando un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1, como se muestra en la figura. Utilizando tu compás y las figuras B y C, encuentra los puntos que corresponden a $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ respectivamente.

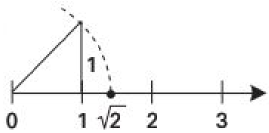


Figura A

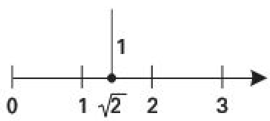


Figura B

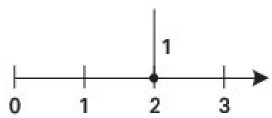
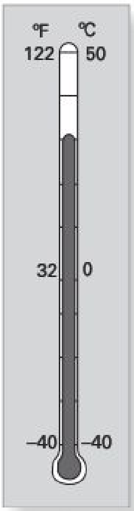


Figura C



Secuencia didáctica

Comenta con tu maestro y tus compañeros acerca del teorema de Pitágoras y reflexiona la siguiente operación algebraica.

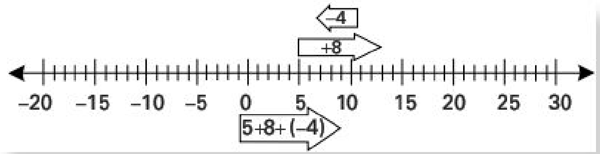
$$\sqrt{1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}$$

Propuesta de aprendizaje

Cierto día de diciembre, la temperatura que se registró en la ciudad de Chihuahua, México, fue de +5 grados Celsius a las 7 A.M.; luego, alrededor de las 2 P.M., la temperatura se modificó +8 grados, y a las 8 P.M. se registró otro cambio de −4 grados. ¿Cuál era la temperatura a las 8 P.M?

Secuencia didáctica

Observa la siguiente recta numérica y reflexiona acerca del comportamiento de la suma de los números reales sobre ésta.



Representación de los números reales y operaciones

En el bloque anterior vimos cómo se representan los *números reales,* los elementos de sus subconjuntos y un avance sobre su operatividad y comportamiento. Ahora nos ocuparemos de estudiar las *operaciones y las propiedades fundamentales* de los números reales.

Con el propósito de definir y analizar las operaciones y propiedades fundamentales de los números reales, designemos tres de ellos como a, b y c.

Adición (+) y multiplicación (×)

Operación	Propiedad	Generalidad	Significado
Adición	**Conmutativa**	$a+b=b+a$	Cuando se suman dos números, el orden es intrascendente.
	Asociativa	$a+(b+c)=(a+b)+c$	Los números se pueden agrupar indistintamente.
	Identidad	$a+0=a$	Sumar cero a cualquier cantidad produce la misma cantidad.
	Inversa o negativa	$a+(-a)=0$	Sumar a una cifra su inverso aditivo da por resultado 0.
Multiplicación	**Conmutativa**	$ab=ba$	Al multiplicar dos números, el orden carece de importancia.
	Asociativa	$a(bc)=(ab)c$	La agrupación de los términos en la multiplicación es intrascendente.
	Identidad	$a\cdot 1=a$	Multiplicar cualquier número por 1 da por resultado el mismo número.
	Inversa o recíproca	$a\left(\frac{1}{a}\right)=1$	Multiplicar un número diferente de cero por su recíproco multiplicativo da como resultado 1.
	Distributiva	$a(b+c)=ab+ac$ $(a+b)c=ac+bc$	Multiplicar un número y la suma de dos cifras equivale a multiplicar cada cifra por el número y luego sumar los resultados.

Sustracción (−) y división (÷)

Definición	Significado	Ejemplos
$a-b=a+(-b)$ a se llama minuendo b se llama sustraendo El resultado de $a-b$ es la **resta**.	Para restar un número de otro se suma el negativo.	$5-12=5+(-12)=-7$
$a\div b=a\cdot\left(\frac{1}{b}\right)=a\cdot b^{-1};\ b\neq 0$ a se llama numerador b se llama denominador La **división** de a y b también suele expresarse como a/b, o bien, $\frac{a}{b}$; el resultado se llama cociente.	Para dividir un número entre otro diferente de cero, se multiplica por el recíproco. Como 0 no tiene inverso multiplicativo, a/b no está definida para $b=0$ así que la división entre cero no está definida. Por esa razón, los números reales en la división no tienen propiedad de cerradura.	$12\div 4=12\cdot\left(\frac{1}{4}\right)=12\cdot 4^{-1}$

Propiedades de los cocientes

Propiedad	Ejemplos
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si $ad=bc$	$\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$ porque $1\cdot 15=3\cdot 5$
$\frac{ad}{bd}=\frac{a}{b}$	$\frac{3\cdot 4}{2\cdot 4}=\frac{3}{2}$
$\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$	$\frac{5}{-7}=\frac{-5}{7}=-\frac{5}{7}$
$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$	$\frac{3}{9}+\frac{5}{9}=\frac{3+5}{9}=\frac{8}{9}$
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 4+5\cdot 3}{5\cdot 4}=\frac{8+15}{20}=\frac{23}{20}$
$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{12}{35}$
$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$	$\frac{3}{4}\div\frac{2}{7}=\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{2}=\frac{21}{8}$

Reglas para sumar números reales

1. Números con el *mismo signo*: Suma los números sin considerar el signo y antepón el signo común al resultado.
2. Números con *signos diferentes*: Sin considerar el signo, resta el número menor del mayor y coloca el signo del número con mayor valor numérico al resultado.

Ejemplos:

1. Suma de números reales con el mismo signo.

a) $5+8=13$ Se asigna el signo común +.

b) $-5+(-8)=-13$ Se asigna el signo común −.

2. Suma de números reales con signos diferentes.

a) $-5+8=(8-5)=+3$ Se asigna el signo positivo.

b) $5+(-8)=-(8-5)=-3$ Prevalece el signo negativo.

c) $-5.3+2.4=-(5.3-2.4)=-2.9$

d) $-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}=+\left(\frac{6}{5}-\frac{3}{5}\right)=+\frac{3}{5}$

e) $\frac{3}{5}+\left(-\frac{6}{5}\right)=-\left(\frac{6}{5}-\frac{3}{5}\right)=-\frac{3}{5}$

3. Resta de números reales.

a) $7-13=7+(-13)=-(13-7)=-6$ Se suma −13.

b) $-7-13=-7+(-13)=-(13+7)=-20$

c) $-7-(-13)=-7+13=+(13-7)=+6$

d) $-3.5-(-2.1)=-3.5+2.1=-1.4$

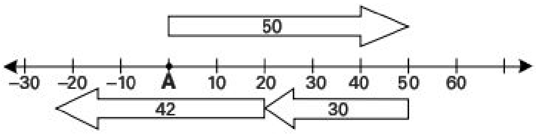
e) $\frac{3}{4}-\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{8}{4}=2$

4. **Aplicación.** Una persona camina 50 metros hacia la derecha desde el punto **A**; en seguida retrocede 30 metros en la misma dirección, y luego otros 42. ¿A qué distancia y dirección del punto **A** se encuentra al final del recorrido?

(Continúa)

(Continuación)

En este caso, la recta numérica es de gran utilidad para encontrar la respuesta; el final del recorrido está a 22 metros a la izquierda de **A**.



Evidencias de aprendizaje

1. Conocimientos. Escribe a la derecha de cada igualdad la propiedad correspondiente.	
Igualdad	**Propiedad**
$x+5=5+x$	
$3+0=3$	
$125+(-125)=0$	
$x+y+2=(x+2)+y$	
$7x=x(7)$	
$1a=a$	
$x(yz)=(yz)z$	
$(x+y)(w+z)=x(w+z)+y(w+z)$	

2. Habilidades. Escribe a la izquierda un ejemplo de cada propiedad indicada.	
Igualdad	**Propiedad**
	Conmutativa de la adición
	Conmutativa de la multiplicación
	Asociativa de la adición
	Identidad de la adición
	Inversa de la multiplicación
	Asociativa de la multiplicación
	Distributiva de la multiplicación
	Identidad de la multiplicación

3. Habilidades. Efectúa las operaciones indicadas.		
a) $5+5=$	*b*) $(-3)+1=$	*c*) $6+(-4)=$
d) $(-2)+(-5)=$	*e*) $2+(-2)=$	*f*) $(-16)+13=$
g) $21+(-4)=$	*h*) $-11+9=$	*i*) $(-17)+(+7)=$
j) $-3.6+5.7=$	*k*) $-8.9+(2.3)=$	*l*) $-3.2+(-5.3)=$
m) $-4.5+8.7=$	*n*) $1.4+(-9.7)=$	*o*) $-2.7+(-4.5)=$
p) $-\frac{7}{3}+\frac{8}{3}=$	*q*) $-\frac{1}{4}+\frac{8}{4}=$	*r*) $-\frac{7}{11}+\left(-\frac{15}{11}\right)=$
s) $-\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=$	*t*) $-\frac{1}{3}+\left(-\frac{2}{5}\right)=$	*u*) $-\frac{4}{3}+\frac{1}{6}=$

Aplicaciones

1. El tipo de cambio del dólar estadounidense con respecto al peso mexicano a principios de enero de 2009 fue de 13.20 pesos por dólar. A lo largo de ese mes registró las siguientes variaciones: +0.35, +0.20, −0.23, −0.05, −0.55. Completa la siguiente tabla para conocer el precio del dólar después de cada variación.

Número de variaciones	1	2	3	4	5
Precio antes de la variación	$13.20				
Variación	+0.35	+0.20	−0.23	−0.05	−0.55
Precio del dólar después de la variación					

2. En cierta región de la sierra Tarahumara en Chihuahua, México, la temperatura más alta que se ha registrado es de +35°C Por otra parte, la temperatura más baja registrada ha sido de −25°C Encuentra la diferencia entre estas dos temperaturas.

Multiplicación y división

Reglas para multiplicar y dividir números reales

1. Cuando se multiplican o se dividen dos números con los *mismos signos*, el producto y el cociente, respectivamente, son positivos.
2. Cuando se multiplican o se dividen dos números con *signos diferentes*, el producto y el cociente, respectivamente, son negativos.

Ejemplos:

1. Determinación de productos.

a) $5 \cdot 7 = 35$ — Tienen el mismo signo; el producto es positivo.

b) $9 \cdot (-3) = -27$ — Signos diferentes; el producto es negativo.

c) $(-8)(-4) = +32$ — Signos iguales; el producto es positivo.

d) $(2.1)(-3.5) = -7.35$

e) $(-2.8)(-4.7) = +13.16$

f) $\left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{6}{15}$

2. Determinación de cocientes.

a) $\frac{24}{3} = 8$ — Signos iguales; el cociente es positivo.

b) $45 \div (-5) = -9$ — Signos diferentes; el cociente es negativo.

c) $\frac{-24}{-3} = 8$ — Signos iguales; el cociente es positivo.

d) $\frac{5}{0} = \infty$ — Esto significa que $\frac{5}{0}$ no está definido, no existe.

e) $\frac{2}{3} \div \left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) = -\frac{14}{15}$ — Se multiplica por el recíproco.

3. Aplicaciones. Una persona come un trozo de carne y dos rebanadas de pan que le proporcionan 50 y 65 calorías, respectivamente. Si un atleta consume 15 calorías por cada minuto que corre, y realiza una carrera durante 23 minutos, ¿cuál es su ganancia o pérdida de calorías?

Solución:

$$\text{Calorías ganadas} = +50\ \frac{\text{cal}}{\text{trozo}} \times 1\ \text{trozo} + 65\ \frac{\text{cal}}{\text{pan}} \times 2\ \text{panes} = 180\ \text{cal}$$

$$\text{Calorías perdidas} = -15\frac{\text{cal}}{\text{minuto}} \times 23\ \text{minutos} = -345\ \text{cal}$$

$$\text{Resultado} = 180\ \text{cal} + (-345)\,\text{cal} = -165\ \text{cal}$$

Evidencias de aprendizaje

1. Habilidades. Efectúa las operaciones indicadas.		
a) $(-10)\cdot 4 =$	*b*) $7\cdot(-3)(-4) =$	*c*) $6(-4) =$
d) $(-2.2)(-5.3) =$	*e*) $3.2(-2.5) =$	*f*) $(-16)13 =$
g) $2.1(-4) =$	*h*) $-11(5.2) =$	*i*) $(-21)\div(+7) =$
j) $-50\div 5 =$	*k*) $-0\div 8 =$	*l*) $-5\div 0 =$
m) $0\div 7 =$	*n*) $-20\div(-4) =$	*o*) $30\div(-5) =$
p) $\left(-\frac{4}{5}\right)\frac{8}{3} =$	*q*) $\frac{3}{4}\left(\frac{2}{7}\right) =$	*r*) $-\frac{7}{11}\left(-\frac{15}{11}\right) =$
s) $-\frac{1}{6}\div\frac{3}{4} =$	*t*) $-\frac{2}{3}\div\left(-\frac{2}{5}\right) =$	*u*) $-\frac{4}{3}\div\frac{7}{3} =$

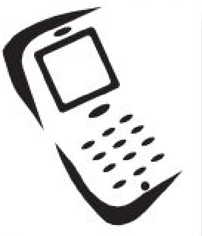
Aplicaciones

1. Una persona come dos trozos de carne, cada uno de los cuales le proporcionan 50 calorías. Al nadar, consume 7 calorías por minuto, y nada durante 12 minutos. ¿Cuántas calorías ganó o perdió?

2. Un atleta come dos trozos de carne que, en conjunto, le aportan 100 calorías. ¿Cuántos minutos tendrá que correr para consumir las calorías que le aporta esa ración? NOTA: Recuerda que el consumo de calorías al correr es de 15 calorías por minuto.

3. Cierto automóvil puede alcanzar su máxima aceleración de 0 a 100 kilómetros por hora en 3.3 segundos. ¿Cuál fue la aceleración promedio de este automóvil? NOTA: La aceleración media de un móvil se calcula con la expresión:

$$\underbrace{a}_{\text{Aceleración}} = \frac{\overbrace{v}^{\text{Velocidad final}} - \overbrace{v_0}^{\text{Velocidad inicial}}}{\underbrace{t}_{\text{Tiempo}}}$$



4. El costo de una llamada en una compañía de teléfonos celulares es de \$2.50 por minuto los primeros 3 minutos, y de \$0.75 por cada minuto adicional. ¿Cuál es el costo de una llamada de 5 minutos?

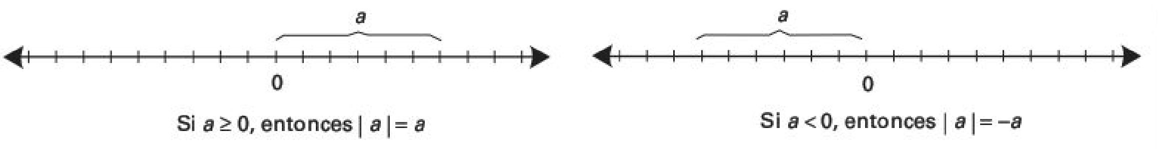
5. El costo de tres libros diferentes para un estudiante de bachillerato fue de \$120, \$115 y \$105. ¿Cuál es el precio promedio por libro?

Simétricos o inversos aditivos de los números reales

En la recta numérica podemos observar que por cada *número positivo* existe un número *simétrico negativo*; estos números se llaman *inversos aditivos o simétricos.*

Valor absoluto de un número

El valor absoluto de un número a se indica con el símbolo $|a|$ y denota el número de unidades entre el origen y la magnitud de a sin tomar en cuenta la dirección. El valor absoluto se define como sigue:



Ejemplos:

1. $|5| = 5,$ porque $5 > 0$
2. $|-5| = -(-5) = 5,$ porque $-5 < 0$
3. $|\sqrt{5} - 5| = 5 - \sqrt{5},$ porque $5 - \sqrt{5} > 0$
4. $|\sqrt{5} - 5| = -\left(\sqrt{5} - 5\right),$ porque $\sqrt{5} - 5 < 0$

En general, se puede decir que $|a| = |-a|$ para todo número real a.

Relaciones de orden entre números reales

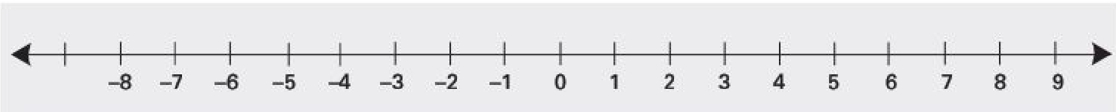
1. Si a es positivo, entonces $-a$ es negativo.
2. Si a es negativo, entonces $-a$ es positivo.

En la siguiente tabla definimos las relaciones posibles que se pueden dar entre dos números reales a y b. Como observarás, se incluyen los símbolos **mayor que** (>) y **menor que** (<). Estas relaciones se llaman **desigualdades**.

Notación	Definición	Terminología
$a > b$	$a - b$ es positivo	a es mayor que b
$a < b$	$a - b$ es negativo	a es menor que b

Evidencias de aprendizaje

1. **Habilidades.** En la siguiente recta numérica marca con un punto y escribe los números simétricos de -7, 5, $-2\frac{3}{4}$, 2.3 y $-\sqrt{9}$.



2. **Conocimientos.** Encuentra

   a) $|-5|$ *b*) $\left|-\frac{5}{3}\right|$ *c*) $|3.2|$ *d*) $-|5|$ *e*) $\left|-3\frac{1}{4}\right|$

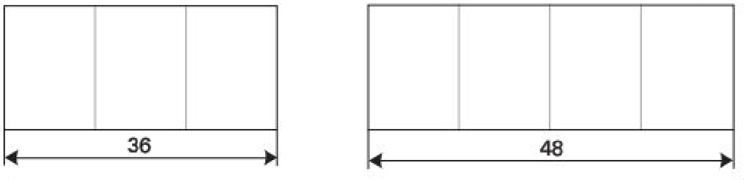
3. Completa la siguiente tabla.

Notación	Definición	Terminología
$9 > 5$	porque $9 - 5$ es positivo	7 es mayor que 5
$3 < 5$		
		10 es menor que 13
	porque $5 - 8$ es negativo	
$-5 > -1$		

Máximo común divisor (MCD) y mínimo común múltiplo (MCM)

Reflexionemos en la siguiente situación:

Una modista tiene dos cortes de tela de 36 y 48 m, respectivamente, y quiere dividirlos en trozos iguales y de la mayor longitud posible. ¿Cuál será la longitud de cada trozo?



Una forma práctica de encontrar la solución de la situación anterior es descomponer primero los números implicados en sus **factores primos**.

Los factores primos de un número se encuentran al dividir el número compuesto entre el menor de sus factores primos y así sucesivamente hasta llegar a la unidad. Por ejemplo, descompongamos 36 y 48 en sus factores primos.

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Los factores primos de 36 son

$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

Los factores primos de 48 son

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2 = 48$

Máximo común divisor (MCD). Es el número mayor de los divisores enteros comunes a esos números. Por ejemplo, el máximo común divisor de 36 y 48 se obtiene de la siguiente manera.

Se descomponen los números simultáneamente en sus factores primos y en seguida se buscan los factores que tengan en común los números descompuestos; el producto de éstos es el **MCD**.

36	48	2
18	24	2
9	12	2
9	6	2
3	3	3
1	1	3
	1	

El **MCD** de 36 y 48 es $2^2 \cdot 3 = 12$ y es la respuesta a la situación anterior.

Esto significa que cada trozo de tela recortado debe medir 12 metros.

Mínimo común múltiplo (MCM). Es el menor de los múltiplos enteros comunes a un grupo de números compuestos, es decir, es el número menor que puede dividirse exactamente entre todos esos números. Por ejemplo, el **MCM** de 36 y 48 se obtiene multiplicando todos los factores primos de ambos.

36	48	2
18	24	2
9	12	2
9	6	2
9	3	3
3	1	3
1	1	

El **MCM** de 36 y 48 es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2 = 144$

Propuesta de aprendizaje

La compañía que produce cierto edulcorante bajo en calorías afirma que 4 onzas de su producto equivalen a 1 libra (16 onzas) de azúcar normal.

a) Representa esta afirmación con una expresión aritmética.

b) ¿Qué puede decirse de esta comparación?

Razones, tasas y proporciones

Razones. La palabra racional se toma del concepto matemático de **razón**, que significa *comparar dos cantidades o dos números*. Esta comparación se puede realizar de dos maneras diferentes: una *por diferencia* y otra *por división*.

De esta forma, en la actividad anterior puede responderse diciendo que el poder edulcorante del producto anunciado es 4 veces mayor que el del azúcar, o bien, que hay una **razón** entre ellos de 4 a 16. Esta razón puede expresarse como la fracción $\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 25\%$. En conclusión, se necesita sólo 1 cucharada del edulcorante o 4 cucharadas de azúcar para producir el mismo efecto.

Razón aritmética	Razón geométrica
$a - b$ Ésta se presenta cuando la comparación se realiza por medio de una diferencia.	$\frac{a}{b} = a \div b = a : b$ Se presenta cuando la comparación se expresa por medio de una división.

En una razón, los términos reciben el nombre de **antecedente** (“a”) el primero y **consecuente** (“b”) el segundo.

En la vida cotidiana, las razones como *modelos matemáticos* son de uso muy frecuente y tienen gran importancia.

Ejemplos:

1. ¿Qué parte de 50 es 23.5?

Solución:

Dividimos 23.5 entre 50:

$$\frac{23.5}{50} = 0.47 = 47\%$$

2. ¿Entre qué número debemos dividir el 30 para que nos dé 60?

Solución:

Llamemos x al número que deseamos conocer. De esta forma,

$$\frac{30}{x} = 60$$

Luego, si consideramos los recíprocos

$$\frac{x}{30} = \frac{1}{60}, \text{ por lo tanto, } x = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} = 0.5$$

3. ¿En cuánto debe venderse un artículo que cuesta $\frac{5}{7}$ de su valor original de \$140?

Solución:

Esto significa que debemos multiplicar $\frac{5}{7}$ por 140

$$\frac{5}{7}(140) = \frac{5}{7} \times \frac{140}{1} = \frac{(5)(140)}{(7)(1)} = 100 \text{ pesos}$$

4. ¿Cuál es la razón de 60 centavos a 2 pesos?

Solución:

2 pesos es igual que 200 centavos; por lo tanto, la razón es:

$$\frac{60}{200} = \frac{3}{10}$$

Evidencias de aprendizaje

Trabajo colaborativo. Forma con tus compañeros un grupo de cuatro integrantes y resuelvan las siguientes situaciones.

Situación	Solución
1. ¿Qué parte de 69 es $\frac{2}{3}$?	
2. ¿Cuánto pierde de su valor un automóvil que se vende a $\frac{4}{5}$ de su valor original, el cual fue de $100,000?	
3. Un vendedor tiene que recorrer el primer día las $\frac{4}{7}$ partes de 105 km y el segundo día $\frac{2}{3}$ de lo que le resta. ¿Cuánto le falta por recorrer?	
4. Tres socios se van a repartir $900,000; el primero y el segundo recibirán $\frac{5}{9}$ y $\frac{1}{3}$ del total, respectivamente. ¿Cuánto recibirá el tercero?	
5. Luego de cortar $\frac{3}{11}$ y $\frac{2}{7}$ de una tabla de madera, la longitud de ésta ha disminuido en 78 cm. ¿Cuál era su longitud original?	
6. En una escuela preparatoria, el número de alumnos respecto de las alumnas es de $\frac{3}{4}$. Si el total de estudiantes es de 2,000, ¿cuántos estudiantes mujeres y hombres hay?	
7. Las ventas de un combustible A respecto de las del combustible B están en la razón $\frac{5}{3}$. Si mensualmente se venden 9,000 litros en total, ¿cuántos litros se venden de A y cuántos de B?	
8. El largo y el ancho de un rectángulo están en la razón de 5:4. Si su perímetro es de 100 cm, determina las medidas de largo y ancho.	
9. Un estudiante contestó correctamente 25 de 30 preguntas en un examen. ¿Cuál es la razón de preguntas incorrectas al número de correctas?	

Tasas. Una tasa es una razón que compara dos cantidades que tienen unidades diferentes. Con frecuencia, el porcentaje que produce un capital se conoce como *tasa de interés*.

Ejemplo:

El chofer de un automóvil afirma que su vehículo puede recorrer 720 kilómetros con 50 litros de combustible. ¿Cuál es la tasa de rendimiento del automóvil?

Solución:

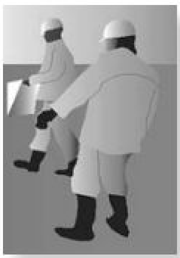
$$\text{Tasa de rendimiento} = \frac{720\,\text{km}}{50\,\text{l}} = 14.4\,{}^{\text{km}}\!/_{\text{l}}$$

Evidencias de aprendizaje

Habilidades. Resuelve las siguientes situaciones.	
Situación	**Respuesta**
1. ¿Cuál es la velocidad de reacción por hora de un analgésico si la dosis prescrita es de 80 mg cada 8 horas?	
2. ¿Cuánto gasta diariamente una familia, si la estimación de gasto mensual es de $15,000?	
3. El crecimiento de un cultivo de bacterias es de 500 cada hora. Calcula el crecimiento por minuto.	
4. Un restaurante te ofrece cortesías en el consumo de tu primera visita de 2×1 o 3×2. ¿Cuál te conviene más?	
5. Un automovilista afirma que su vehículo puede recorrer 500 kilómetros con 40 litros de combustible. ¿Cuál es la tasa de rendimiento del automóvil?	

Propuesta de aprendizaje

Un trabajador **A** puede hacer un trabajo en 3 días, mientras que otro empleado **B** afirma que lo puede realizar en 2 días. ¿Cuántos días tomaría a ambos laborando juntos completar el trabajo?



Secuencia didáctica

- ✓ El trabajador **A** realiza $\frac{1}{3}$ del trabajo en un día.
- ✓ El trabajador **B** realiza $\frac{1}{2}$ del trabajo en un día.
- ✓ Ambos trabajadores terminan en x días, y en un día hacen $\frac{1}{x}$ del trabajo.
- ✓ Por lo tanto, lo que pueden hacer los dos trabajadores en un día es:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{x}$$

- ✓ Con el apoyo de tu maestro, despeja x en la igualdad anterior y recuerda cómo se llama la igualdad de estas razones.

Proporciones. En matemáticas, la *igualdad de dos razones* se llama **proporción**; por ejemplo, $\frac{3}{4}=\frac{12}{16}$, lo que también se puede expresar como 3:4 = 12:16, y se lee "3 es a 4 como 12 es a 16".

En general, si tenemos la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, que puede expresarse también como $a:b=c:d$, los términos a y d se llaman *extremos*, mientras que b y c son los *medios*.

$$\overbrace{a : \underbrace{b = c}_{\text{Medios}} : d}^{\text{Extremos}}$$

Propiedad fundamental de las proporciones. La propiedad fundamental de las proporciones dice que el producto de sus extremos es igual al producto de sus medios, es decir,

$$ad = bc$$

Con todo esto, la solución de la situación de los trabajadores **A** y **B** de la actividad anterior es la siguiente:

Tenemos la proporción

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{x}$$

$$(6)\cdot\frac{1}{3}+(6)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{x}\cdot(6)$$ Multiplicamos cada término por el MCM.

$$2+3=\frac{6}{x}$$ Simplificamos.

$$5=\frac{6}{x}$$

$$5x=6$$ Propiedad fundamental de las proporciones

$$x=\frac{6}{5}=1.2$$ Despejamos x.

Esto significa que ambos trabajadores realizan el trabajo en 1.2 días (1 día y 4.8 horas).

Ejemplos:

1. En la proporción $\frac{x}{14}=\frac{58}{7}$, encuentra el valor de x.

Solución:

Utilizamos la propiedad fundamental de las proporciones:

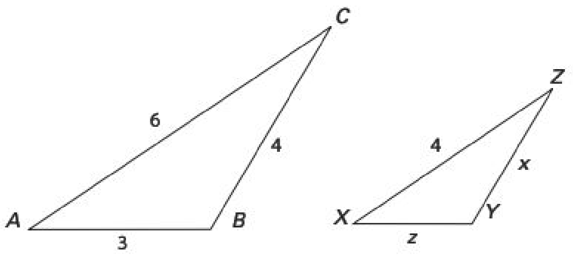
$$7x=(14)(58)$$

$$x=\frac{(14)(58)}{7}=116$$ Simplificamos.

2. En seguida se muestran dos triángulos semejantes cuyos lados se miden en centímetros. Encuentra el valor del lado z del triángulo de la derecha.

Solución

Como los triángulos son semejantes, sus lados correspondientes tienen que ser proporcionales.



$$\frac{z}{3}=\frac{4}{6}$$

$$\frac{z}{3}=\frac{2}{3}$$ Simplificamos.

$$z=\frac{2}{3}(3)=2$$ Despejamos z.

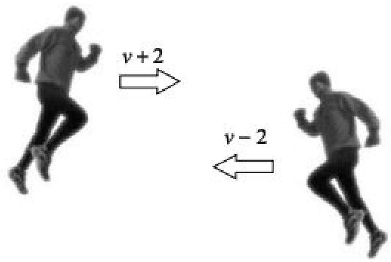
En geometría, las figuras que tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño se llaman *figuras semejantes*.

(Continúa)

(Continuación)

3. Supón que corres con el viento a tu favor y recorres 10 km. Piensas que de regreso harás el mismo tiempo, pero ¡sorpresa! sólo recorres 8 km en ese lapso. Por supuesto, el viento corría a 2 km por hora. ¿Cuál sería tu velocidad v si el viento estuviera tranquilo?

Solución:



Llamemos $v+2$ a tu velocidad en un sentido y $v-2$ a tu velocidad en sentido contrario cuando sopla el viento.

Si el viento estuviera tranquilo, harías el mismo tiempo en un sentido que en sentido contrario:

$$\underbrace{\quad t \quad}_{\text{Tiempo de ida}} = \underbrace{\quad t \quad}_{\text{Tiempo de regreso}}$$

Recordemos que el tiempo se obtiene dividiendo el desplazamiento entre la velocidad. Por lo tanto,

$$\frac{10}{v+2}=\frac{8}{v-2} \qquad \text{Igualamos los tiempos.}$$

$$10(v-2)=8(v+2) \qquad \text{Propiedad fundamental de las proporciones.}$$

$$10v-20=8v+16 \qquad \text{Simplificamos.}$$

$$10v-8v=16+20 \qquad \text{Trasponemos términos.}$$

$$2v=36$$

$$v=\frac{36}{2}=18 \qquad \text{Despejamos } v.$$

Por lo tanto, tu velocidad con el viento tranquilo es de 18 km por hora.

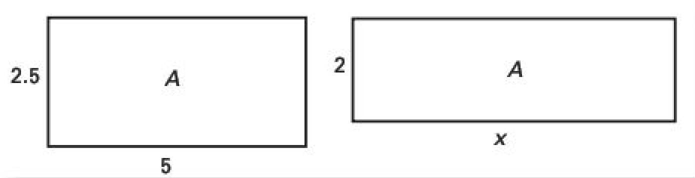
Evidencias de aprendizaje

1. Resuelve la proporción $\frac{x}{14}=\frac{58}{100}$.

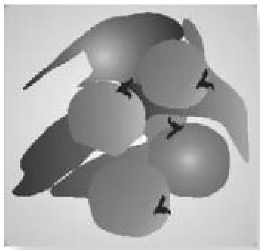
2. Un automóvil recorre 100 kilómetros con 8 litros de gasolina. ¿Cuántos litros necesita para recorrer 370 kilómetros, que es la distancia de Chihuahua a Ciudad Juárez?

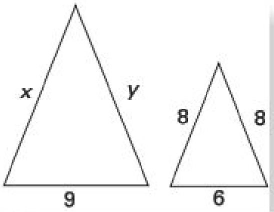
3. Un reloj se atrasa 3 minutos en una semana. ¿Cuánto se atrasará en un año?

4. Una superficie rectangular mide 2.5 metros de ancho por 5 metros de largo. ¿Cuánto se debe variar el largo para que el ancho sea de 2 metros sin que la superficie cambie?

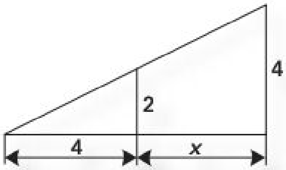


5. Si 20 libras de manzanas cuestan 1.80 dólares, ¿cuánto cuestan 28 libras de manzanas?





6. Dos triángulos son semejantes y sus lados se miden en centímetros. Encuentra el valor del lado x del triángulo de la izquierda.

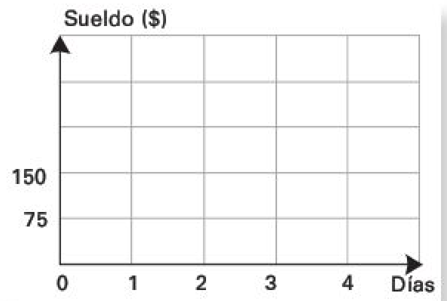


7. Encuentra el valor de x en la figura mostrada.

Propuesta de aprendizaje

Completa la siguiente tabla que indica el sueldo de un trabajador que gana $75 diarios; después, grafica los resultados de la tabla. Desarrolla un modelo algebraico que te permita calcular directamente cualquier número de días laborados y el sueldo mensual correspondiente.

Días de trabajo	1		
Sueldo	75		



Cuando en matemáticas dos cantidades variables están relacionadas de forma que una siempre es un múltiplo constante de la otra, se dice que ocurre *variación directa*.

Variación directa

Si x y y están relacionadas mediante la expresión algebraica

$$y = kx$$

donde $k \neq 0$ se dice que y varía en forma *directamente proporcional* a x, y la constante k se llama *constante de proporcionalidad*. Esto significa que cuando x aumenta o disminuye, y aumenta o disminuye en la misma proporción.

Ejemplos:

1. *a*) Escribe una ecuación que exprese que P es directamente proporcional a F.

b) Si $P = 50$ y $F = 5$, determina la constante de proporcionalidad k.

Solución:

a) La ecuación que expresa la proporcionalidad directa de P y F es

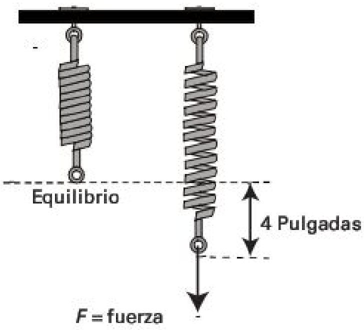
$$P = kF$$

b) Al despejar y sustituir obtenemos la constante: $k = \frac{P}{F} = \frac{50}{5} = 10$

2. La ley de Hooke establece que la fuerza necesaria para mantener un resorte estirado x unidades más allá de su posición natural varía en forma directamente proporcional a x. Una fuerza de 20 libras alarga el resorte 4 pulgadas.

a) Escribe una ecuación que relacione la fuerza aplicada con la distancia alargada x, y determina la constante de proporcionalidad k.

b) ¿Cuánto alargará el resorte una fuerza de 30 libras?



Solución:

a) x es la distancia que se alarga el resorte; F es la fuerza que estira el resorte.

Como la fuerza varía en forma directamente proporcional con lo que se estira el resorte,

$$F = kx \qquad \text{entonces,} \qquad k = \frac{F}{x} = \frac{20}{4} = 5, \qquad \text{lo cual implica}$$

que la ecuación buscada es $F = 5x$.

b) Si $F = 30$ libras, la distancia que se alargará el resorte es: $x = \frac{F}{5} = \frac{30}{5} = 6$ pulgadas.

(Continúa)

(Continuación)

3. Durante una tormenta vemos el relámpago antes de oír el trueno porque la luz viaja a mayor velocidad que el sonido. La distancia entre tu posición y el centro de la tormenta varía directamente con el tiempo que transcurre entre el instante en que se ve el relámpago y el momento en el que se escucha el trueno.

Suponiendo que el trueno de una tormenta, cuyo centro está a 1,646 metros de distancia, se escucha 5 segundos después de que se ve el relámpago, determina la constante de proporcionalidad y escribe la ecuación de la variación.

Solución:

Llamemos t al tiempo que transcurre entre el instante en que se ve el relámpago y el instante en que se escucha el trueno, y d la distancia entre la tormenta y la posición que ocupas. Por lo tanto, como la variación entre estas variables es directa,

$$d = kt$$

entonces, $k = \frac{d}{t} = \frac{1{,}646}{5} \approx 330$. Al sustituir este valor en $d = kt$, obtenemos la ecuación de d en función de t

$$d = 330t$$

Variación inversa

Si x y y son dos cantidades variables y están relacionadas mediante la expresión algebraica

$$y = k\frac{1}{x}$$

donde $k \neq 0$, se dice que y varía en forma *inversamente proporcional* a x, y la constante k se llama *constante de proporcionalidad*. Esto significa que cuando x aumenta, y disminuye en la misma proporción o viceversa.

Ejemplos:

1. Escribe una expresión que describa el hecho de que u es inversamente proporcional a v. Si $u = 3$ y $v = 5$, determina el valor de la constante de proporcionalidad.

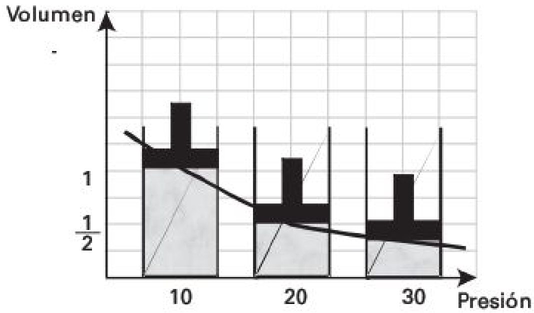
Solución:

Primero, escribimos la expresión $u = k\frac{1}{v}$; luego, sustituimos los valores de u y de v:

$3 = k\frac{1}{5}$, y al multiplicar la igualdad por 5 tenemos que $k = 15$.

2. **Ley de Boyle.** Cuando un gas se comprime a una temperatura constante, la presión del gas es inversamente proporcional al volumen del mismo.

Observa en la gráfica adyacente que si el gas se comprime a la mitad de su volumen, la presión se duplica.



3. La presión P de un gas es directamente proporcional a la temperatura T e inversamente proporcional a su volumen V.
   a) Escribe una ecuación que exprese el enunciado anterior.
   b) Si 100 litros de gas ejercen una presión de 33.2 kilopascales (kPa) a una temperatura de 400 grados Kelvin, determina la constante de proporcionalidad.

Solución:

a) $P = k\frac{T}{V}$

b) $33.2\ kPa = k\frac{400\ °K}{100\ l}$ Sustituimos valores.

$k = \frac{(33.2\ kPa)(100\ l)}{400\ °K} = 8.3\frac{kPa \cdot l}{°K}$ Despejamos k.

Evidencias de aprendizaje

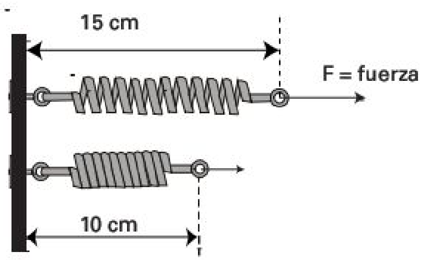
1. En la siguiente tabla escribe una fórmula algebraica que exprese el enunciado y luego utiliza la información dada para determinar el valor de la constante de proporcionalidad.

Enunciado	Fórmula	*k*
a) R varía directamente con l. Si $R = 4$, entonces, $l = 32$.		
b) z varía inversamente con u. Si $z = 5$, entonces, $u = 2$.		
c) y es directamente proporcional a x. Si $x = 3$, entonces, $y = 32$.		
d) W varía inversamente con r^2. Si $r = 6$, entonces, $W = 10$.		
e) S varía directamente con p y q. Si $S = 1$, entonces, $p = 4$ y $q = \frac{1}{4}$.		

2. Marca con el símbolo ✓ la celda correspondiente para indicar si las magnitudes son directamente proporcionales o inversamente proporcionales.

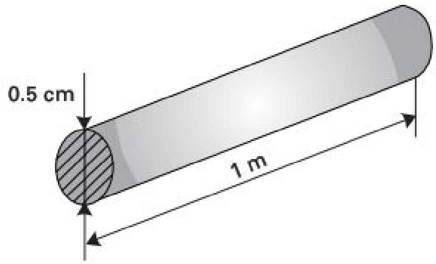
Enunciado	Variación directa	Variación inversa
a) La calificación y el desempeño escolar		
b) La velocidad y el tiempo de un automóvil para recorrer una distancia dada		
c) El gasto de energía eléctrica y el número de lámparas		
d) Un trabajo determinado y el número de empleados		

3. Expresa la ley de Hooke como una ecuación. Si un resorte tiene una longitud natural de 10 cm y se requiere una fuerza de 40 newtons (N) para mantener el resorte estirado a una longitud de 15 cm, calcula la constante del resorte.

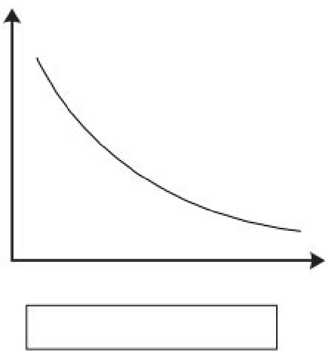


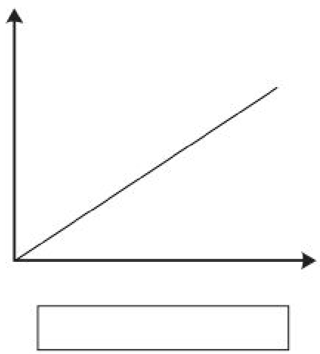
4. La resistencia R de un conductor eléctrico varía directamente con su longitud L y en forma inversamente proporcional con el cuadrado de su diámetro d. Escribe una expresión de esta variación y determina la constante de proporcionalidad para un conductor de 1 m de largo, 0.5 cm de diámetro y una resistencia de 100 ohms.

5. La *Ley de Boyle-Mariotte* dice que cuando un gas se comprime a una temperatura constante, la presión del gas es inversamente proporcional al volumen del mismo, y la ley de *Charles y Gay-Lussac* enuncia que si la presión se mantiene constante, el volumen del gas es directamente proporcional a la temperatura.



Considerando estos enunciados, identifica en las gráficas de abajo cada ley y escribe su nombre en el recuadro correspondiente. Además, escribe el nombre adecuado para cada uno de los ejes de las gráficas para saber si representan el volumen, la presión o la temperatura.





AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 2

Considera tu desempeño como estudiante e indica la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

☹ **0** Nunca   😐 **5** Algunas veces   ☺ **10** Siempre

CONOCIMIENTOS Después de estudiar el bloque, ¿adquiriste los conocimientos que te permiten	
• identificar distintas formas de representar y operar los números reales?	
• identificar los subconjuntos de los números reales?	
• ubicar en la recta numérica los simétricos, el valor absoluto y las relaciones de orden de los números reales?	
• reconocer las propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas?	
• identificar formas de comparar y relacionar números reales (razones, tasas, proporciones y variaciones)?	
• comprender el significado de razón, tasa y proporción?	
• interpretar la propiedad fundamental de las proporciones?	
• reconocer y modelar variaciones directas e inversas?	

HABILIDADES Al finalizar el bloque, ¿desarrollaste las habilidades que te permiten	
• realizar operaciones con números reales?	
• construir hipótesis, diseñar y aplicar modelos aritméticos y/o algebraicos con números reales?	
• emplear las propiedades fundamentales de los números reales?	
• utilizar razones, tasas, proporciones y variaciones?	
• aplicar la propiedad fundamental de las proporciones?	
• utilizar modelos de variación proporcional directa e inversa?	
• utilizar sistemas y reglas que sustentan el uso de las razones, proporciones y tasas en diversas situaciones?	

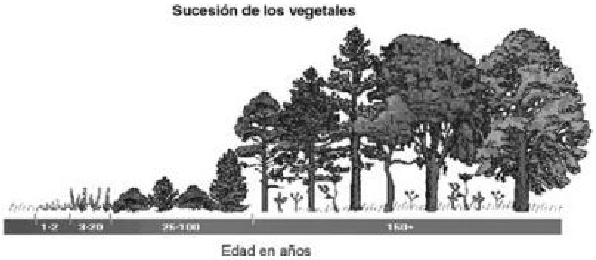
CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 0.67. El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte respecto a las **actitudes** y los **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás al estudiar el tema.

BLOQUE

3 Sumas y sucesiones de números



Unidades de competencia

En este bloque se pretende que el alumno desarrolle las siguientes competencias:

- Construir e interpretar modelos aritméticos, algebraicos y gráficos aplicando las propiedades de los números reales y las expresiones aritméticas y algebraicas, relacionando magnitudes constantes y variables, y empleando literales para la representación y resolución de situaciones y/o problemas aritméticos y algebraicos concernientes a su vida cotidiana y escolar, los cuales le ayudarán a explicar y describir su realidad.
- Identificar las características presentes en tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos provenientes de situaciones cotidianas y traducirlas a un lenguaje aritmético y/o algebraico.

Conocimientos

Al finalizar este bloque, el alumno habrá adquirido los conocimientos que le permitirán:

- Identificar e interpretar sucesiones y series aritméticas y geométricas.
- Reconocer términos de sucesiones aritméticas y geométricas.
- Ordenar información de acuerdo con relaciones en series y sucesiones aritméticas y geométricas.
- Reconocer la forma algebraica del término *n*-ésimo de sucesiones aritméticas y geométricas particulares.
- Identificar gráficamente el tipo de relación variacional en la fórmula del *n*-ésimo término de sucesiones aritméticas y geométricas particulares.

Habilidades

Al finalizar este bloque, el alumno habrá desarrollado las habilidades que le permitirán:

- Aplicar las fórmulas correspondientes para hallar el modelo del n-ésimo término que caracteriza a una sucesión aritmética o geométrica particular.
- Escribir términos de sucesiones aritméticas y geométricas.
- Aplicar las fórmulas correspondientes para hallar el valor de una serie aritmética y geométrica finita o infinita convergente.
- Obtener términos de sucesiones aritméticas y geométricas utilizando la diferencia o razón común, o aplicando las fórmulas.
- Construir gráficas para establecer el comportamiento de sucesiones aritméticas y geométricas particulares.
- Determinar regularidades y patrones de las sucesiones y series aritméticas o geométricas.
- Diseñar y aplicar modelos sencillos de series y sucesiones.
- Organizar ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética en relación con series y sucesiones.

Actitudes y valores

Al finalizar este bloque, el alumno:

- Apreciará la utilidad de expresar matemáticamente regularidades y patrones.
- Aportará puntos de vista con apertura y considerará los de otras personas de manera reflexiva.
- Promoverá el diálogo como mecanismo para la resolución de conflictos.

Indicadores de desempeño

Se pretende que el alumno logre:

- Utilizar la calculadora como instrumento de exploración de regularidades mediante la verificación de la existencia de diferencias o cocientes constantes en términos sucesivos de sucesiones numéricas.
- Emplear los procedimientos apropiados para obtener términos específicos, o la fórmula del n-ésimo término, de sucesiones y series aritméticas o geométricas particulares, y justificar su uso.

(*Continúa*)

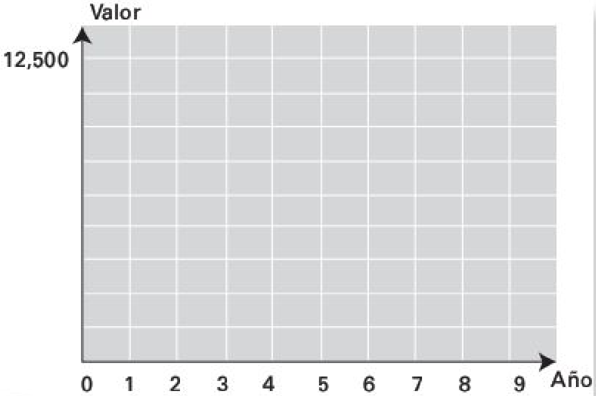
(*Continuación*)

- Comprobar las fórmulas del n-ésimo término, obteniendo diversos términos de sucesiones aritméticas o geométricas y verificando que los cocientes o diferencias entre ellos sean constantes.
- Representar gráficamente sucesiones aritméticas y geométricas, y asociarlas con relaciones lineales y exponenciales discretas.
- Aplicar las fórmulas para hallar la suma de sucesiones aritméticas o geométricas y describir verbalmente los resultados obtenidos al solucionar problemas de su entorno.

Propuesta de aprendizaje

El valor inicial de una computadora es de \$12,750. Su depreciación por año es de \$1,375. Completa la tabla adjunta para conocer el valor de la computadora después de 4 años.

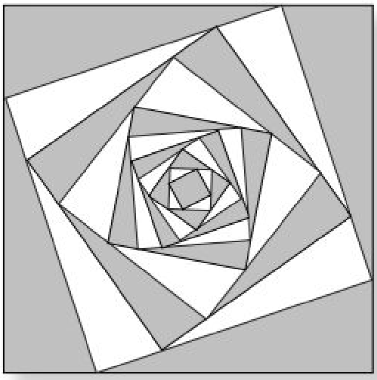
Año	0	1	2	3	4
Valor	\$12,500				



Secuencia didáctica

- Si llamamos a_n al valor de la computadora y n al número de años de vida, reflexiona con tus compañeros si la expresión $a_n = 12500 - 1375n$ nos sirve para calcular el valor de la computadora en cualquier año.
- ¿En qué año pierde todo su valor la computadora?
- Utiliza la cuadrícula que aparece a la izquierda para dibujar una gráfica del comportamiento de la depreciación anual del precio de la computadora. Luego, observa cuánto vale después de 2.5 años.

Sucesiones y series aritméticas



En matemáticas, la palabra **sucesión** tiene prácticamente el mismo significado que en el lenguaje cotidiano.

Cuando disponemos de una lista de números dispuestos en un orden específico, lo que estamos obteniendo es una **sucesión o progresión numérica**. De esta forma, si llamamos a_1 al primer término, a_2 al segundo término, a_3 al tercero y a_n al n-ésimo (se lee enésimo) término de la lista, entonces la sucesión se puede expresar de la siguiente manera:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\dots,\ a_n$$

Y como a cada término a_n le corresponde un número natural n una *sucesión o progresión* se puede definir como una regla de dependencia entre los términos de la sucesión y los números naturales.

Definición. Una **sucesión** es una lista de términos dispuestos en un orden específico de forma que queden definidos por una regla de dependencia determinada por el conjunto de los números naturales.

Un ejemplo sencillo de una sucesión son los números impares

$$1, 3, 5, 7, 9, 11,\dots$$

Los puntos sucesivos significan que la sucesión continúa de forma indefinida, por lo que se llama precisamente *sucesión infinita*.

El ejemplo nos muestra que efectivamente se trata de los números impares, pero para mayor exactitud es conveniente especificar un procedimiento para calcular todos y cada uno de los términos de la sucesión. En este caso,

$$\boxed{a_n = 2n - 1}$$

porque si tomamos cualquier número natural n lo multiplicamos por 2 y le restamos 1, obtenemos un número impar. La sucesión se expresa como sigue:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 3, & 5, & 7, & \dots, & 2n-1, \dots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & & a_n \end{array}$$

Observa cómo la fórmula $a_n = 2n - 1$ nos permite obtener todos los términos de la sucesión.

Por ejemplo, los primeros cuatro términos de la sucesión se obtienen así:

Si $n = 1$, entonces, $a_1 = 2(1) - 1 = 1$

Si $n = 2$, entonces, $a_2 = 2(2) - 1 = 3$

Si $n = 3$, entonces, $a_3 = 2(3) - 1 = 5$

Si $n = 4$, entonces, $a_4 = 2(4) - 1 = 7$

Otra forma de escribir las sucesiones es con la notación funcional:

$$a(n) = 2n - 1$$

De manera que

$a(1) = 2(1) - 1 = 1$, $a(2) = 2(2) - 1 = 3$

etcétera.

Sucesiones aritméticas

Probablemente la forma más sencilla de generar una sucesión es comenzar con un número a_1 y sumar una constante d a cada término consecutivo.

Sucesión aritmética. Es una sucesión de la forma

$$a_1,\quad a_1 + d,\quad a_1 + 2d,\quad a_1 + 3d,\quad a_1 + 4d,\ \ldots$$

donde a_1, es el *primer término*, y d la *diferencia común* de la sucesión entre dos términos consecutivos.

Por lo tanto, el n-ésimo término de una sucesión aritmética se puede calcular con la expresión

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Ejemplos:

1. Si $a_1 = 2$ y $d = 3$, calcula los 4 primeros términos y el n-ésimo término de la sucesión aritmética.

Solución:

$$a_2 = a_1 + (n-1)d = 2 + (2-1)(3) = 5$$

$$a_3 = a_1 + (n-1)d = 2 + (3-1)(3) = 8$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + 3(n-1)$$

2. Encuentra el n-ésimo término de la sucesión aritmética

$$5,\ 2,\ -1,\ -4,\ -7,...$$

Solución:

La diferencia común se obtiene restando dos términos consecutivos; por lo tanto, $d=-3$ y el n-ésimo término de la sucesión es

$$a_n = 5 - 3(n-1)$$

3. Encuentra los 5 primeros términos y el 100-ésimo (centésimo) término de la sucesión

$$17,\ 12,\ldots$$

Solución:

El primer término es 17, por lo tanto, $a_1 = 17$ y la diferencia entre dos términos consecutivos es $d = 12 - 17 = -5$ luego,

$$a_n = 17 - 5(n-1)$$

$$a_2 = 17 - 5(2-1) = 12$$

$$a_3 = 17 - 5(3-1) = 7$$

$$a_4 = 17 - 5(4-1) = 2$$

$$a_5 = 17 - 5(5-1) = -3$$

$$a_{100} = 17 - 5(100-1) = -478$$

Los primeros 6 términos de la sucesión son: 17, 12, 7, 2, –3, –8, y el 100-ésimo es –478.

4. El término 11 de una sucesión aritmética es 52, y la diferencia d es 5. Calcula el 300-ésimo (se lee tricentésimo) término.

Solución:

Para calcular el n-ésimo término de la sucesión necesitamos conocer a_1 y d de la expresión

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

(Continúa)

(Continuación)

Sabemos que $a_{11} = 52$ y que $d = 5$, es decir,

$52 = a_1 + (11-1)5$	Sustituimos a_{11} por 52, d por 5 y n por 11.
$52 = a_1 + 50$	Simplificamos.
$2 = a_1$	Restamos 50 en ambos lados.

El 300-ésimo término es $a_{300} = 2 + 5(300-1) = 1497$.

Evidencias de aprendizaje

1. Determina la diferencia común, el cuarto término, el 100-ésimo y el n-ésimo de cada sucesión aritmética.

Sucesión aritmética	d	a_4	a_{100}	a_n
a) $2,\ 5,\ 8,\ 11, \ldots$				
b) $1,\ 5,\ 9,\ 13, \ldots$				
c) $-12,\ -8,\ -4,\ 0, \ldots$				
d) $2,\ 2+s,\ 2+2s,\ 2+3s, \ldots$				

2. Resuelve cada una de las siguientes situaciones.

Sucesión aritmética	Solución
a) El duodécimo término de una sucesión aritmética es 32, y la diferencia común es 3. Calcula el 20-ésimo término.	
b) El 100-ésimo término de una sucesión aritmética es 98, y la diferencia común es 2. Calcula los 3 primeros términos.	
c) El vigésimo término de una sucesión aritmética es 101, y la diferencia común es 3. Calcula los 2 primeros términos.	

Series aritméticas

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)
Matemático alemán que demostró el teorema fundamental del álgebra.

Anécdota de Gauss. Cuenta la historia que cuando el célebre matemático C. F. Gauss estaba en la escuela, su profesor planteó esta suma a la clase, para mantenerlos ocupados. Gauss dio la respuesta correcta casi de inmediato. Se fijó que los números guardan un patrón de comportamiento y supuso que la suma también, y desarrolló este procedimiento: dispuso la suma de los números en orden ascendente y después en orden descendente y sumó de la siguiente manera

$$\begin{array}{rcccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & +\dots+ & 98 & + & 99 & + & 100 \\ S & = & 100 & + & 99 & + & 98 & +\dots+ & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & 101 & + & 101 & + & 101 & +\dots+ & 101 & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

Es evidente que

$$2S = (1+100)100 = (101)100, = 10{,}100, \text{ por lo tanto, } S = \frac{10100}{2} = 5050.$$

Naturalmente, este procedimiento puede generalizarse para hallar la suma de los n primeros términos de cualquier sucesión aritmética. Así,

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \cdots + a_n \text{ y}$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + (a_n - 3d) + \cdots + a_1$$

Sumando ambas expresiones tenemos que

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)$$

Hay n términos idénticos en el lado derecho de esta ecuación, por eso

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Pero recuerda que $a_n = a_1 + (n-1)d$ es el n-ésimo término de la sucesión, así que la suma la podemos escribir también como

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_1 + (n-1)d\right] = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

Serie aritmética. Es la suma S_n de los n términos de una sucesión aritmética.

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \cdots + a_n$$

Se puede calcular con cualquiera de las siguientes fórmulas:

1. $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ **2.** $S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$

Ejemplos:

---

1. Calcula la suma de los primeros 50 números pares.

Solución:

En este caso, $a_1 = 2$ y $d = 2$. El n-ésimo término de esta sucesión es $a_n = 2n$, por lo que $a_{50} = 2(50) = 100$. Por lo tanto, la suma buscada es

$$S_{50} = \frac{n}{2}(a_1 + a_{50}) = \frac{50}{2}(2 + 100) = 2550$$

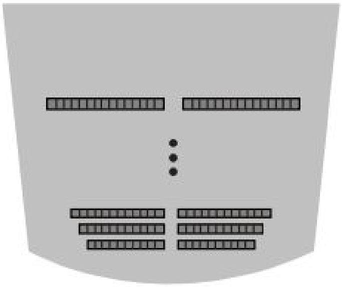
2. Calcula la suma de los 40 primeros términos de la sucesión aritmética 3, 7, 11, 15,...

Solución:

Para esta sucesión, $a_1 = 3$ y $d = 4$, de manera que $a_{40} = 3 + 4(40-1) = 159$. así que la suma de los 40 términos de la sucesión es

$$S_{40} = \frac{n}{2}(a_1 + a_{40}) = \frac{40}{2}(3 + 159) = 3240$$

3. **Aplicación.** Un teatro tiene 50 filas de asientos, y en la primera fila hay 20 butacas, 22 en la segunda, 24 en la tercera y así sucesivamente. Calcula la cantidad total de butacas.



Solución:

La cantidad de asientos forma una sucesión aritmética con $a_1 = 20$ y $d = 2$. Entonces, utilizando la segunda fórmula, la suma de butacas es

$$S_{50} = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] = \frac{50}{2}\left[2\cdot 20 + 2(50-1)\right] = 3450 \text{ asientos}$$

4. **Aplicación.** El valor inicial de un automóvil es de 25,000 dólares. Su depreciación anual es de 1,500 dólares. Calcula el valor del auto después de 5 años.

Solución:

El valor de $d = -1{,}500$ y el de $a_1 = 25{,}000 + (-1{,}500) = 23{,}500$, y estamos buscando a_5, que es

$$a_5 = 23{,}500 + (5-1)(-1{,}500) = 17{,}500 \text{ dólares.}$$

Observa la siguiente tabla para una mejor comprensión.

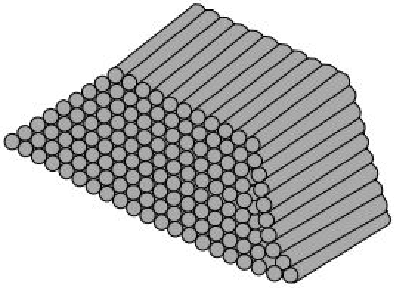
Tiempo	Primer año	Segundo año	Tercer año	Cuarto año	Quinto año
Valor	\$23,500	\$22,000	\$20,500	\$19,000	\$17,500

Evidencias de aprendizaje

1. Determina las sumas indicadas en la siguiente tabla.

Suma parcial	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
a) $1 + 5 + 9 + \ldots + 401$	
b) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$	
c) $-3 + \left(-\frac{3}{2}\right) + 0 + \frac{3}{2} + 2 + \cdots + 30$	
d) $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 150$	
e) $0.7 + 2.7 + 4.7 + \ldots + 56.7$	

2. Se almacenan postes de teléfonos en una pila con 20 postes en la primera fila, 19 en la segunda, y así sucesivamente. Si hay 10 capas, ¿cuántos postes hay en la pila?

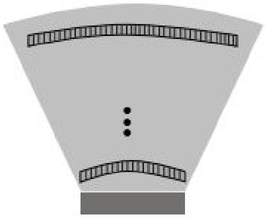


3. Una persona recibe una oferta de trabajo con un salario de $250,000 anuales, y le prometen aumentos anuales de $23,000. Demuestra que sus ingresos totales a los 5 años de trabajar serán de $1,595,000. Completa la siguiente tabla para comprobar tus cálculos.

Tiempo	Primer año	Segundo año	Tercer año	Cuarto año	Quinto año
Ingresos					

4. En un cine al aire libre hay lugares para estacionar 20 automóviles en la primera fila, 22 en la segunda, 24 en la tercera, y así sucesivamente. Si hay 21 filas en ese cine, calcula la cantidad de autos que se pueden estacionar.

5. Un arquitecto diseña un teatro con 20 butacas en la primera fila, 22 en la segunda, 24 en la tercera, y así sucesivamente hasta llegar a 42 en la última. Si el teatro debe tener 930 lugares, ¿cuántas filas debe haber en el diseño?



6. Cierta compañía de telefonía celular cobra $3 por el primer minuto y $1.20 por cada minuto adicional. Diseña una expresión algebraica para calcular el

costo de una llamada de n minutos y completa la siguiente tabla que contempla una llamada de 3 minutos.

Minutos	Menos de 1	1	2	3
Costo ($)	3			

Propuesta de aprendizaje

Cierta institución financiera ofrece el 12% de interés anual. Si una persona invierte 100 dólares, ¿cuánto dinero habrá acumulado después de 4 años? Para encontrar la respuesta reflexiona y luego completa las casillas vacías de la siguiente tabla realizando las operaciones correspondientes.

Año	**Dinero acumulado**	
1	$100 + 100(0.12) = 100(1 + 0.12)$	$112
2		
3		
4		

Secuencia didáctica

- Las respuestas correctas de la actividad anterior son: $112, $125.44, $140.40 y $157.35.
- Divide el dinero acumulado del año 2 entre el dinero del año 1, en seguida divide la cantidad acumulada del año 3 entre la cantidad acumulada del año 2 y así sucesivamente; finalmente, escribe tu conclusión acerca del resultado de estas divisiones.

- ¿Cuánto dinero de interés generó la cuenta cada año?

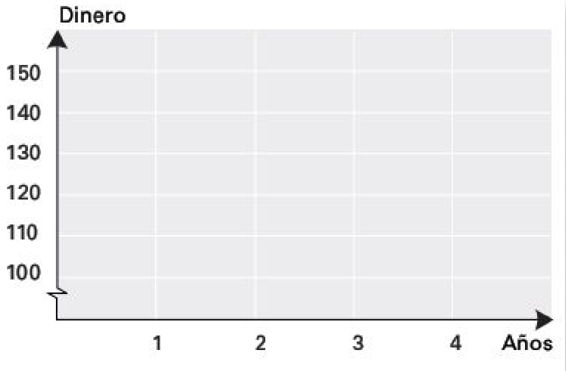
Año	1	2	3	4
Dinero ($)				

- Con tus compañeros y el apoyo de tu maestro reflexiona sobre si el modelo matemático

$$A = 100(1 + 0.12)^t$$

generaliza la situación de la propuesta de aprendizaje anterior; A representa el saldo de la cuenta por año y t el tiempo en años.

- Bosqueja una gráfica de los resultados de la primera tabla de la *propuesta de aprendizaje* anterior.



- Investiga las tasas de interés que ofrecen las instituciones financieras de tu comunidad.

Sucesiones y series geométricas

Otra técnica muy sencilla para generar una sucesión es iniciar con un número a_1 y multiplicarlo en forma repetida por una constante r que no sea cero. Observa cómo se comportaría la sucesión y cómo se obtiene el n-ésimo término de tal sucesión.

$$a_2 = a_1 r$$

$$a_3 = a_2 r = (a_1 r)\, r = a_1 r^2$$

$$a_4 = a_3 r = (a_1 r^2)\, r = a_1 r^3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Por consiguiente, la sucesión es de la forma

$$a_1,\ a_1r,\ a_1r^2,\ a_1r^3,\ a_1r^4,\ldots,\ a_1r^{n-1}$$

y se llama **sucesión geométrica**.

Sucesión geométrica. Es una sucesión de la forma

$$a_1,\ a_1r,\ a_1r^2,\ a_1r^3,\ a_1r^4,\ldots,\ a_1r^{n-1}$$

donde a_1 es el primer término, y r es el factor común de la sucesión entre dos términos consecutivos.
Por lo tanto, el n-ésimo término de una sucesión aritmética se calcula mediante la expresión

$$a_n = a_1r^{n-1}$$

Ejemplos:

1. Si $a_1 = 2$ y $r = 3$, se forma la sucesión geométrica

$$2,\ 2\cdot 3,\ 2\cdot 3^2,\ 2\cdot 3^3,\ 2\cdot 3^4,\ldots, a_n = 2(3)^{n-1}$$

o bien, $2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ldots\ a_n = 2(3)^{n-1}$

2. La sucesión

$$2, -10, 50, -250, 1{,}250,\ldots,\ a_n = 2(5)^{n-1}$$

es geométrica con $a_1 = 2$ y $r = -5$. Fíjate que el factor común r se obtiene dividiendo un término consecuente entre el antecedente, $r = \dfrac{-10}{2} = \dfrac{50}{-10} = -5$.

3. La sucesión

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots\ ,1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

es geométrica con $a_1 = 1$ y $r = \dfrac{1}{2}$.

(Continúa)

(Continuación)

4. **Intereses.** Se invierten \$2,500 a una tasa de interés del 8% anual. Encuentra la cantidad después de 6 años.

Solución:

Llamemos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_6$ a las cantidades de dinero al final de cada año; luego, para conocer r calculamos A_1 y A_2

$$A_1 = 2{,}500 + 2{,}500(0.08) = 2{,}500(1 + .08) = 2{,}500(1.08) = 2{,}700$$

$$A_2 = 2{,}700(1.08) = 2{,}916$$

Con esto, podemos calcular el factor r:

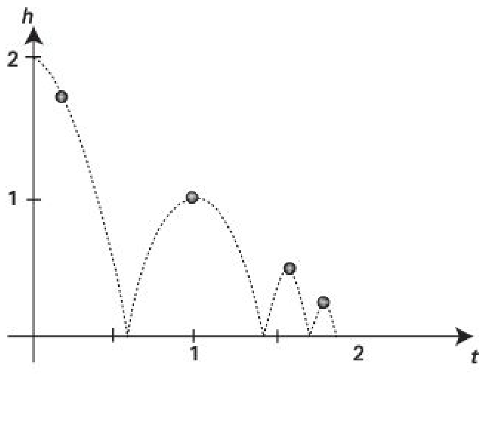
$$r = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2{,}916}{2{,}700} = 1.08$$

Por lo tanto, la cantidad de dinero en el sexto año es:

$$A_6 = A_1 r^{n-1} = 2{,}700(1.08)^{6-1} = \$3{,}967.18$$

5. **Elasticidad de una pelota.** Las sucesiones geométricas también se encuentran en la naturaleza. Si una pelota se deja caer desde 2 metros de altura, rebota sólo $\frac{1}{2}$ de su posición inicial, es decir, $(2)\cdot\frac{1}{2} = 1$. El segundo rebote llega a una altura de $(1)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, es decir, $r = \frac{1}{2}$ y así sucesivamente. Por consiguiente, la altura h_n es la n-ésima altura en el n-ésimo rebote y se determina mediante la fórmula

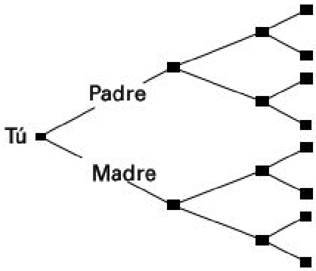
$$h_n = 1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$$



6. **Antepasados.** La figura mostrada representa un árbol genealógico con la generación actual (que te incluye) y tres generaciones anteriores, con un total de 12 abuelos. Si buscaras tu historia familiar hasta 6 generaciones atrás, ¿cuántos antepasados encontrarías sin contar a tus padres?

Solución:

Si observas el árbol, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ y $r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{4}{2} = 2$



Por lo tanto,

n	1	2	3	4	5	6
a_n	2	4	8	16	32	64

El total de antepasados sin contar a tus padres son:

$$4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 124$$

Evidencias de aprendizaje

1. Determina si la sucesión es geométrica. Si lo es, calcula la razón.

Sucesión	Razón
a) 2, 4, 8, 16,...	
b) 2, 6, 8, 36,...	
c) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8},\ldots$	
d) 27, −9, 3, −1,...	

2. Determina la razón, el quinto y el n-ésimo término de las sucesiones dadas.

Sucesión	Razón	a_5	a_n
a) $4,\ 12,\ 36,\ldots$			
b) $16,\ 8,\ 4,\ldots$			
c) $4,\ -8,\ 16,\ -32,\ldots$			
d) $1,\ \sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ldots$			

3. Resuelve cada una de las situaciones descritas a continuación.

Situación	Solución
a) El primer término de una sucesión geométrica es 3, y el tercero es 4. Calcula el quinto término.	
b) El primer término de una sucesión geométrica es 8, y el segundo término es 4. Calcula el quinto término.	
c) La razón de una sucesión geométrica es $\frac{2}{5}$ y el cuarto término es $\frac{5}{2}$. Calcula el tercer término.	

4. Si el valor de un automóvil es de $120,000 y se deprecia un 10% anualmente, ¿cuál será el valor del auto después de 5 años? Calcula el valor utilizando la fórmula y comprueba tu resultado completando la siguiente tabla.

Año	1	2	3	4	5
Valor del automóvil					

5. En cierto cultivo, el número de bacterias se duplica cada día. Si hay 1,000 bacterias al final del primer día, ¿cuántas habrá después de 6 días? Calcula el valor utilizando la fórmula y comprueba tu resultado completando la siguiente tabla:

Día	1	2	3	4	5	6
Número de bacterias						

6. Una población tiene 200,000 habitantes y crece a razón del 1.2% cada año. Estima la población en 30 años.

Series geométricas finitas

Supón que te propones ahorrar guardando 1 centavo el primer día, 2 centavos el segundo, 4 el tercero y así sucesivamente. Si continúas duplicando la cantidad guardada durante 30 días, ¿cuánto tendrás al final del mes?

Cuando trates de encontrar la respuesta, te darás cuenta de que sería útil tener una fórmula que nos permita obtener la suma de todas esas cantidades de una manera más fácil.

Para deducir una fórmula que nos permita calcular la suma S_n de los n términos de una sucesión geométrica

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1}$$

multiplicamos S_n por r y luego lo restamos de S_n. De esta forma, obtenemos

$$\begin{array}{rl} S_n = & a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1} \\ -rS_n = & \quad\;\; - a_1 r - a_1 r^2 - a_1 r^3 - \cdots - a_1 r^{n-1} - a_1 r^n \\ \hline S_n - rS_n = & a_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - a_1 r^n \end{array}$$

Así,

$$S_n(1-r) = a_1(1-r^n), \text{ entonces, } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

Este resultado se puede resumir como sigue:

La suma

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-1}$$

de los n primeros términos de una sucesión geométrica es igual a

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}; \qquad r \neq 1$$

Ejemplos:

1. Ahora ya podemos calcular de manera muy rápida la cantidad de dinero total ahorrada al cabo de 30 días si guardas 1 centavo el primer día, 2 el segundo, 4 el tercero y así sucesivamente. Al utilizar la fórmula anterior con $a = 1$ y $n = 30$ se obtiene

$$S_{30} = \frac{1(1-2^{30})}{1-2} = 1{,}073{,}741{,}823 \quad \text{centavos}$$

Convertimos esa cifra a pesos y vemos que la cantidad total ahorrada es de $10,737,418.23.

2. Determina la suma de los 10 primeros términos de la sucesión geométrica

1, 0.5, 0.25, 0.125, . . .

Solución:

La suma requerida de esta sucesión con $a_1 = 1$ y $r = \frac{0.5}{1} = 0.5$ es

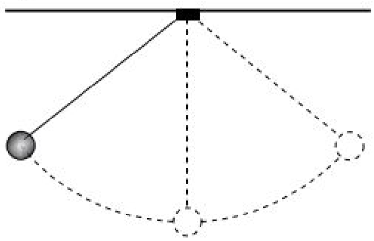
$$S_n = 1\frac{1-(0.5)^{10}}{1-0.5} = 1.998047$$

4. Un péndulo recorre una distancia de 20 cm en su primera oscilación. Después recorre el 80% de cada una de las oscilaciones anteriores. ¿Cuál es la distancia total recorrida después de 4 oscilaciones?

Solución:

Tenemos que encontrar S_4 con $a_1 = 20$ y $r = 0.8$. Esto es,

$$S_4 = 20\frac{1-(0.8)^4}{1-0.8} = 59.04 \text{ cm}$$

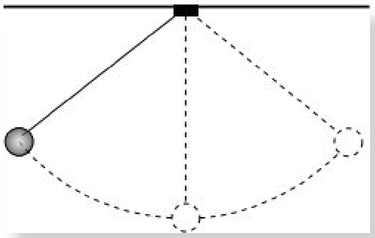


Evidencias de aprendizaje

1. Calcula la suma de la sucesión geométrica de acuerdo con las condiciones descritas.

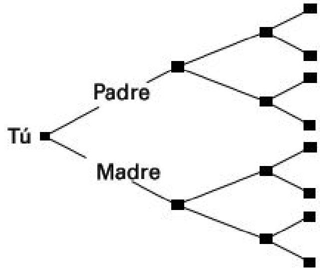
Sucesión geométrica	Suma
a) $a_1 = 5, \quad r = 2, \quad n = 6$	
b) $a_1 = \frac{2}{3}, \quad r = \frac{1}{3}, \quad n = 4$	
c) $a_3 = 28, \quad a_6 = 224, \quad n = 6$	
d) $a_2 = 0.12, \quad a_5 = 0.00096, \quad n = 4$	

2. Un péndulo recorre una distancia de 20 cm en su primera oscilación. Después, recorre el 80% de cada una de las oscilaciones anteriores. ¿Cuál es la distancia total recorrida después de 7 oscilaciones?



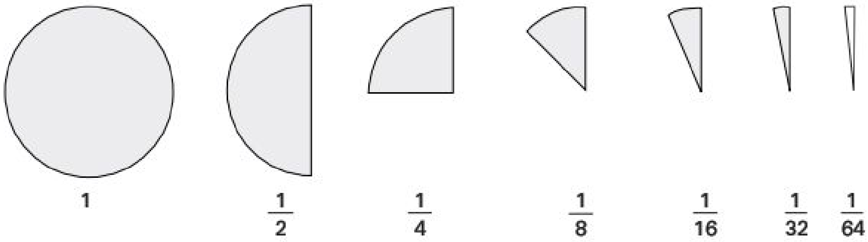
3. Una pelota se deja caer desde una altura de 9 ft. Su elasticidad es tal que siempre rebota y alcanza la tercera parte de la altura desde la que se dejó caer. ¿Cuál es la distancia total recorrida por la pelota en el instante en que llega al suelo la quinta vez?

4. La siguiente figura representa un árbol genealógico con la generación actual (que te incluye) y tres generaciones anteriores, con un total de 12 abuelos. Si buscaras tu historia familiar hasta 10 generaciones, ¿cuántos antepasados encontrarías sin contar a tus padres?



Propuesta de aprendizaje

Considera un pastel circular que se consume de acuerdo con el siguiente patrón: el primer día se come la mitad, el siguiente día la mitad de lo que queda, el tercer día de nuevo se consume la mitad de lo que queda y así sucesivamente. ¿Quiere decir esto que nunca se terminará el pastel? (Observa la figura).



Secuencia didáctica

- ✔ Trabaja en equipo para encontrar la suma de $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$
- ✔ Comenta con tu maestro si la suma es mayor que 1.
- ✔ ¿Significa que el 1 se puede expresar como una suma infinita de números cada vez más pequeños?
- ✔ ¿Se puede diseñar una fórmula que sume todos los términos anteriores?

Series geométricas infinitas

Una serie infinita de la forma

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-1} + \cdots$$

se llama **serie geométrica infinita** y se puede obtener a partir del siguiente razonamiento:

$S = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots$ Llamamos S a la suma infinita.

$S = a_1 + r\,\underbrace{\left(a_1 + a\,r_1 + a_1r^2 + \cdots\right)}_{S}$

$S = a_1 + rS$

$S - rS = a_1$ Trasponemos términos.

$S(1-r) = a_1$ Factorizamos S.

De esta manera, se obtiene la fórmula para encontrar la suma de una serie geométrica infinita.

$$S = \frac{a_1}{1-r}; \qquad |r| < 1.$$

Este resultado se puede resumir como sigue:

> La serie
>
> $$a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-1} + \cdots$$
>
> se llama *serie geométrica infinita* y tiene como suma
>
> $$S = \frac{a_1}{1-r}, \quad \text{para} \quad |r| < 1.$$

Ejemplos

1. Calcula la suma de la serie geométrica infinita

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Solución:

En primer lugar, identificamos $a_1 = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$, y aplicamos la fórmula

$$S = \frac{a_1}{1-r} \quad S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

(Continúa)

(Continuación)

2. Escribe la fracción que representa al decimal periódico $1.3\overline{42}$.

Solución:

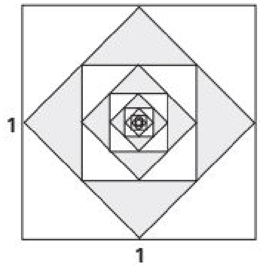
$$\frac{13}{10}+\frac{42}{1,000}+\frac{42}{100,000}+\frac{42}{10,000,000}+\cdots$$

3. **Aplicación.** En un cuadrado de lado 1 se trazan sucesivamente nuevos cuadrados a partir del punto medio. Sabiendo que el área del cuadrado más grande es $a_1 = 1$ y que el área del cuadrado que le sigue es $a_2 = \frac{1}{2}$, calcula la suma de las áreas de todos los cuadrados.

Solución:

Aplicamos la fórmula $S = \frac{a_1}{1-r}$ con $a_1 = 1$ y $r = \frac{1}{2}$.

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

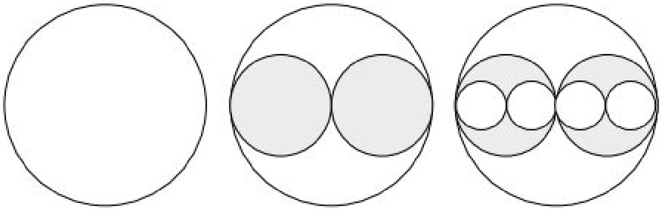


Evidencias de aprendizaje

1. Calcula la suma de las siguientes sumas geométricas infinitas.

Sucesión geométrica	Suma
a) $\frac{1}{5}+\frac{2}{25}+\frac{4}{125}+\cdots$	
b) $3-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}-\frac{3}{8}+\cdots$	

2. En un disco circular de radio 1 se dibujan otros dos de la mitad del radio; luego, se trazan cuatro círculos más con la mitad del radio anterior y así indefinidamente. Calcula el área total de todos los discos. (Observa la figura).
NOTA: Recuerda que el área de un círculo es πr^2.



AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 3

Considera tu desempeño como estudiante e indica la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

☹ **0** Nunca 😐 **5** Algunas veces ☺ **10** Siempre

CONOCIMIENTOS Después de estudiar el bloque, ¿adquiriste los conocimientos que te permiten	
• identificar e interpretar sucesiones y series aritméticas y geométricas?	
• reconocer términos de sucesiones aritméticas y geométricas?	
• ordenar la información que contienen las sucesiones y series aritméticas y geométricas?	
• reconocer el *n*-ésimo término de sucesiones aritméticas y geométricas?	
• identificar gráficamente el comportamiento de sucesiones aritméticas y geométricas?	

HABILIDADES Al finalizar el bloque, ¿desarrollaste las habilidades que te permiten	
• aplicar las fórmulas para hallar el *n*-ésimo término de sucesiones aritméticas y geométricas?	
• aplicar las fórmulas para hallar el valor de una serie aritmética y geométrica finita o infinita convergente?	
• obtener términos de sucesiones aritméticas o geométricas utilizando la diferencia o razón común, o aplicando las fórmulas?	
• construir gráficas para determinar el comportamiento de sucesiones aritméticas y geométricas?	
• determinar patrones y regularidades de sucesiones aritméticas y geométricas?	
• diseñar y aplicar modelos sencillos de series y sucesiones aritméticas y geométricas?	

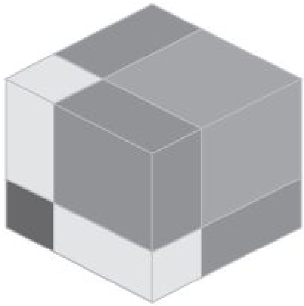
CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 0.91. El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte respecto a las **actitudes** y los **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás al estudiar el tema.

BLOQUE

4 Transformaciones algebraicas I



Unidades de competencia

En este bloque se pretende que el alumno desarrolle las siguientes competencias:

- Construir e interpretar modelos aritméticos, algebraicos y gráficos aplicando las propiedades de los números reales y las expresiones aritméticas y algebraicas, relacionando magnitudes constantes y variables, y empleando literales para la representación y resolución de situaciones y/o problemas aritméticos y algebraicos concernientes a su vida cotidiana y escolar, los cuales le ayudarán a explicar y describir su realidad.
- Identificar las características presentes en tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos, provenientes de situaciones cotidianas, y traducirlas a un lenguaje aritmético y/o algebraico.

Conocimientos

Al finalizar este bloque, el alumno habrá adquirido los conocimientos que le permitirán:

- Identificar las operaciones de suma, resta y multiplicación de polinomios en una variable.
- Identificar el producto de binomios aplicando patrones de productos notables.
- Comprender las técnicas de extracción de factor común simple y por agrupación.
- Comprender las técnicas de factorización basadas en productos notables de diferencia de cuadrados y de trinomios cuadrados perfectos.

Habilidades

Al finalizar este bloque, el alumno habrá desarrollado las habilidades que le permitirán:

- Ejecutar sumas, restas y multiplicaciones con polinomios en una variable.
- Emplear productos notables para determinar y expresar el resultado de multiplicaciones de binomios.
- Formular expresiones en forma de producto, utilizando técnicas básicas de factorización.
- Utilizar los productos notables de diferencia de cuadrados y de trinomios cuadrados perfectos.
- Establecer relaciones entre procesos inversos al multiplicar y factorizar.

Actitudes y valores

Al finalizar este bloque, el alumno:

- Valorará la conveniencia de anticipar resultados al multiplicar binomios mediante patrones establecidos.
- Reflexionará respecto a la ventaja de realizar diversas transformaciones algebraicas para simplificar o interpretar resultados.
- Propondrá maneras creativas de solucionar problemas.
- Reconocerá sus errores en los procedimientos algebraicos y buscará corregirlos.

Indicadores de desempeño

Se pretende que el alumno logre:

- Utilizar suma, resta y multiplicación de polinomios, productos notables y factorizaciones básicas para obtener la solución de problemas teóricos y prácticos de su entorno.
- Redactar problemas referentes a situaciones de su realidad, cuyo planteamiento o solución requieran de la transformación de expresiones algebraicas mediante operaciones y factorizaciones básicas.
- Enunciar de forma verbal o escrita los resultados obtenidos al resolver problemas teóricos o prácticos utilizando operaciones y/o factorizaciones básicas.

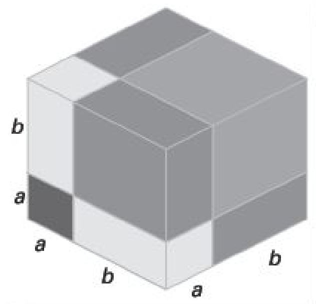
(Continúa)

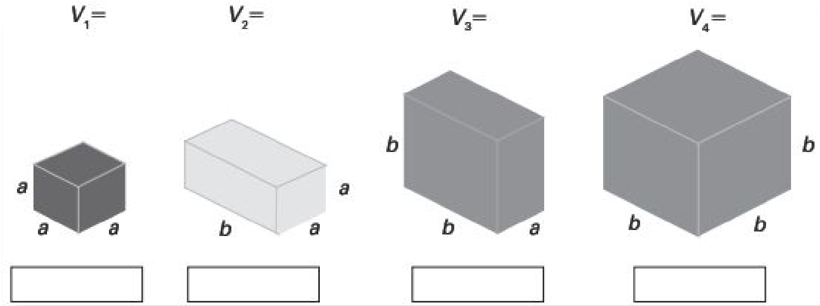
(Continuación)

- Explicar las transformaciones algebraicas (operaciones y factorizaciones) utilizadas en la resolución de un problema y justificar su uso.
- Comprobar las soluciones de un problema con el modelo basado en operaciones y/o factorizaciones básicas de polinomios.

Propuesta de aprendizaje

La figura adjunta es un cubo cuyos lados miden $a + b$; además, está dividido en varias figuras geométricas. Obsérvalo cuidadosamente para calcular el volumen de cada una y luego identifica y escribe en el recuadro cuántas figuras hay de cada una en el cubo.





Secuencia didáctica

- ¿Cuál es el volumen total del cubo?
- Con ayuda de tus compañeros diseña una expresión algebraica para calcular directamente el volumen del cubo mayor.
- Una de las siguientes expresiones nos proporciona el volumen total del cubo mayor. ¿Con cuál de ellas coincides?

  a) $a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3$

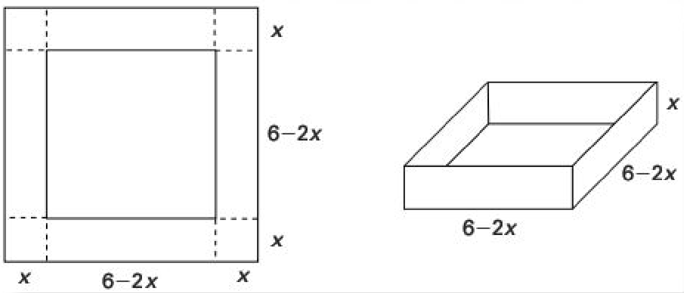
  b) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

  c) $a^3 + 3ab + 3ab + b^3$

- Con el apoyo de tu maestro y demás compañeros de clase, concluyan una solución final.

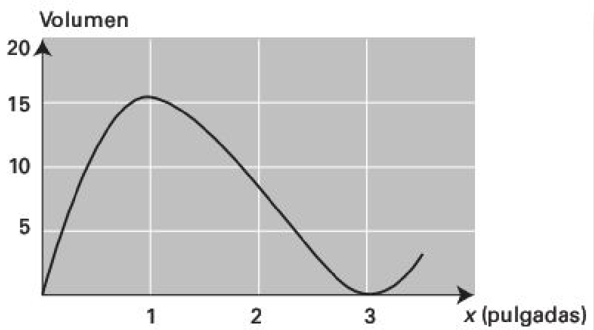
Propuesta de aprendizaje

Se desea diseñar una caja rectangular abierta por arriba cortando cuadrados de lado x en las esquinas de una pieza de cartón que mide 6 por 6 pulgadas, como se muestra en la figura. Escribe un modelo, o expresión, para encontrar el volumen de la caja.



Secuencia didáctica

- Para encontrar el modelo que calcule el volumen de la caja, observa la figura y fíjate que tienes que multiplicar el área de la base por la altura.
- Calcula el volumen de 3 cajas diferentes para valores de $x = 1$, 2 y 3 pulgadas. Reflexiona con tus compañeros acerca de estos valores.
- La gráfica muestra el volumen de diferentes cajas para valores de x entre 0 y 3 pulgadas. De acuerdo con tu apreciación, ¿para cuál valor de x el volumen de la caja es mayor?
- Analiza con tus compañeros el significado de la gráfica.



Conceptos básicos

Antes de iniciar el tema de *polinomios* vamos a revisar algunos conceptos importantes. Estos conceptos se estudiarán de manera opcional de acuerdo con el criterio del profesor.

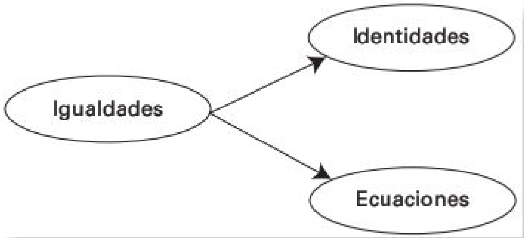
Igualdad

Es la relación que se establece entre dos cantidades o expresiones algebraicas cuya diferencia es cero.

Esta relación se expresa vinculando las cantidades o expresiones algebraicas en cuestión mediante el signo =, que se lee *igual a*. Son ejemplos de igualdades:

$$x+2=3-5x; \qquad (a+b)(a-b)=a^2-b^2; \qquad 5k^2-3k-1=0$$

Clasificación de las igualdades. Las igualdades pueden clasificarse como lo muestra el siguiente diagrama.



Una *identidad* es una igualdad que se cumple para cualquier valor que tomen las variables que están presentes en ella. Para indicar esta relación se utiliza el signo ≡, que se lee como *es idéntico a*. Dos ejemplos de identidades son:

$$x+y\equiv y+x; \qquad (a+b)^2\equiv a^2+2ab+b^2$$

Una *ecuación* es una igualdad en la que también hay una o varias cantidades desconocidas, sólo que, en este caso, la relación se cumple únicamente para determinados valores de las variables implicadas. Son ejemplos de ecuaciones:

$$5x-3=2-x; \qquad k^3-8=0; \qquad \frac{3x-3}{4-5x}=2-y$$

Las partes o expresiones separadas por el signo = en una igualdad reciben el nombre de **miembros**, mientras que los números o cantidades relacionados con los signos + o − en cada miembro se llaman **términos**.

$$\underbrace{\overset{\text{Término }-}{\overbrace{2x}} \quad 5}_{\text{1er. miembro}} \quad \underbrace{x \quad \overset{+\text{ Término}}{\overbrace{17}}}_{\text{2o. miembro}}$$

Propiedades de las igualdades

En las propiedades siguientes, a, b y c son números reales.

Propiedad	Igualdad	Significado
Aditiva	$a = b \Rightarrow a + c = b + c$	Si a una igualdad se le suma la misma cantidad en ambos miembros, la relación de igualdad permanece.
Sustractiva	$a = b \Rightarrow a - c = b - c$	Si a una igualdad se le resta la misma cantidad en ambos miembros, la relación de igualdad permanece.
Multiplicativa	$a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$	Cuando en una igualdad el miembro de la izquierda y el miembro de la derecha se multiplican por la misma cantidad, la igualdad no se altera.
Divisora	$a = b \Rightarrow a \div c = b \div c$	Cuando en una igualdad el miembro de la izquierda y el miembro de la derecha se dividen entre la misma cantidad, la igualdad no se altera.
Sustitución	$a = b \Rightarrow b = a$	Si $a = b$ entonces a puede sustituir a b en cualquier expresión algebraica para dar una expresión equivalente.

Exponentes

Notación exponencial

Si a es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces la n-ésima potencia de a es

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

El número a se conoce como **base**, y n como **exponente**.

Ejemplos:

a) $(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$

b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{9}$

c) $-2^5 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -32$

d) $(5^3)(5^2) = (5 \cdot 5 \cdot 5)(5 \cdot 5) = (5)^5 = 3125$

Multiplicación de potencias con la misma base

Es fácil concluir que la notación exponencial finalmente es una multiplicación abreviada en la que los factores se repiten n veces. Por eso es que, a partir de su definición, podemos enunciar varias reglas útiles que nos permitan trabajar de manera más rápida y eficiente con los exponentes.

Para multiplicar dos potencias de la misma base se procede de la siguiente manera:

$$3^4 \cdot 3^2 = \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{\text{4 factores}}\underbrace{(3 \cdot 3)}_{\text{2 factores}} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{6 factores}} = 3^6 = 3^{4+2}$$

La evidencia nos indica que *para multiplicar dos potencias con la misma base, sumamos sus exponentes*. En general, si a es un número real, y m y n son dos enteros positivos cualesquiera, entonces

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \;\cdots\; \cdot a}_{m \text{ factores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \;\cdots\; \cdot a}_{n \text{ factores}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \;\cdots\; \cdot a}_{m\,+\,n \text{ factores}} = a^{m+n}$$

De esta manera, hemos demostrado que

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

donde m y n son enteros positivos.

Cuando m y n son 0 o enteros negativos, entonces se cumple que

$$2^0 \cdot 2^3 = 2^{0+3} = 2^3$$

pero esto sólo se cumple si $2^0 = 1$. Asimismo, debemos tener en cuenta que

$$2^5 \cdot 2^{-5} = 2^{5+(-5)} = 2^0 = 1$$

Esto es cierto si $2^{-5} = \dfrac{1}{2^5}$. Estas conclusiones nos conducen a las siguientes definiciones.

Exponentes cero y negativos

Si a es cualquier número real diferente de cero y n es un entero positivo, entonces,

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplos:

a) $(-3)^0 = 1$ *b*) $a^{-1} = \frac{1}{a}$ *c*) $\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$

División de potencias con la misma base

Si vamos a *dividir dos potencias con la misma base*, podemos tomar de referencia lo anterior para concluir el patrón de comportamiento, es decir,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$$

Las operaciones nos indican que *para dividir dos potencias con la misma base, restamos sus exponentes*:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplos:

a) $\frac{5^7}{5^3} = 5^{7-3} = 5^4 = 625$ *b*) $\frac{x^9}{x^5} = x^{9-5} = x^4$

Elevar una potencia a otra potencia

Si m y n son enteros positivos, tenemos que

$$(a^m)^n = \left(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \ a}_{m \text{ factores}}\right)^n = \underbrace{\left(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \ \cdot a}_{m \text{ factores}}\right)\left(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \ \cdot a}_{m \text{ factores}}\right) \cdot \ \cdots \ \cdot \left(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \ \cdot a}_{m \text{ factores}}\right)}_{n \text{ factores}}$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \ \cdot a}_{mn \text{ factores}} = a^{mn}$$

Por lo tanto,

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Los casos en que $m \leq 0$ o $n \leq 0$ se prueban con la definición para exponentes negativos.

Ejemplo:

a) $(5^2)^3 = 5^{(2)(3)} = 5^6 = 15625$ *b*) $(x^{-2})^5 = x^{(-2)(5)} = x^{-10} = \frac{1}{x^{10}}$

Leyes o reglas de los exponentes

La siguiente tabla contiene las **leyes de los exponentes** y es esencial conocerlas para desarrollar mejor nuestro trabajo. Consideramos que a y b son números reales, y los exponentes m y n son enteros.

Ley	Descripción	Ejemplo
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	Si multiplicamos dos potencias de la misma base, se suman los exponentes.	$2^3 \cdot 2^5 = 2^8 = 256$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Para dividir dos potencias con la misma base, restamos sus exponentes.	$\frac{x^7}{x^4} = x^{7-4} = x^3$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	Para elevar una potencia a una nueva potencia, se multiplican los exponentes.	$(b^3)^5 = b^{3\cdot5} = b^{15}$
4. $(ab)^n = a^n b^n$	Para elevar un producto a una potencia, se eleva cada factor a la potencia.	$(2y)^3 = 2^3 y^3 = 8y^3$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	Para elevar un cociente a una potencia, se eleva tanto el numerador como el denominador a la potencia.	$\left(\frac{x}{5}\right)^3 = \frac{x^3}{5^3} = \frac{x^3}{125}$
6. $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$	Para mover del numerador al denominador o del denominador al numerador un número elevado a una potencia, se cambia el signo del exponente.	$\frac{x^{-n}}{y^{-m}} = \frac{1}{x^n} \cdot \frac{y^m}{1} = \frac{y^m}{x^n}$
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	Para elevar una fracción a una potencia negativa, se invierte la fracción y se cambia el signo del exponente.	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{b^n}{1} = \frac{b^n}{a^n}$

Simplificación de expresiones con exponentes

Simplifica

a) $(3x^2)(2x)^4$ *b*) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2\left(\dfrac{y^3x}{z}\right)^2$

Solución:

a) $(3x^2)(2x)^4 = (3x^2)(2^4x^4)$ Ley 4

$= (3x^2)(16x^4)$ Ley 3

$= (3)(16)x^{2+4}$ Ley 1 y agrupamiento de términos

$= 48x^6$

b) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2\left(\dfrac{y^3x}{z}\right)^2 = \dfrac{x^2}{y^2}\cdot\dfrac{(y^3)^2x^2}{z^2}$ Ley 4 y 5

$= \dfrac{x^{2+2}y^{3\cdot 2}}{y^2z^2} = \dfrac{x^4y^6}{y^2z^2}$ Leyes 1 y 3

$= \dfrac{x^4y^{6-2}}{z^2} = \dfrac{x^4y^4}{z^2}$ Ley 2 y agrupamiento

Autoevaluación

1. Calcula las potencias que se presentan a continuación.

a) $(-4)^2 =$	*b*) $-4^2 =$	*c*) $\pi^0 =$
d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} =$	*e*) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2(4)^{-3} =$	*f*) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^0\cdot 3^{-2} =$
g) $3^{-2}\cdot 4^5 =$	*h*) $\dfrac{5^{10}}{5^4} =$	*i*) $(3^2\cdot 3^5)^3 =$

2. Simplifica las siguientes expresiones y escríbelas sólo con exponentes positivos.

a) $x^{-2}x^{8} =$	*b*) $(6x)^{3} =$
c) $(3a^{2}b)(2a^{5}b^{6}) =$	*d*) $(ab)^{3}(2b^{-6})(4a)^{5} =$
e) $\dfrac{x^{5}(2x)^{3}}{x^{3}} =$	*f*) $\dfrac{(2x)^{3}}{2x^{5}} =$
g) $\dfrac{(x^{2}y^{3})^{4}(xy^{-4})^{-3}}{x^{2}y} =$	*h*) $\dfrac{(xy^{2}z^{3})^{4}}{(x^{3}y^{2}z)^{3}} =$

Radicales

Ya sabemos lo que significa 2^{n} cuando n es un entero, pero valdría la pena preguntarse el significado de una expresión como $2^{3/5}$, donde el exponente es un número racional, es decir, no es entero. Para esto es necesario conocer y analizar los **radicales**.

> Quizás estés pensando que el número 4 tiene dos raíces cuadradas: 2 y −2. Pero por convención, se sugiere que cuando se desee la raíz cuadrada negativa, se debe escribir $-\sqrt{4} = -2$, ya que la raíz positiva 2 se conoce como la raíz cuadrada principal de 4.

El símbolo $\sqrt{\ }$ significa *raíz cuadrada positiva*. De manera que,

$$\sqrt{x} = a \text{ significa que } a^{2} = x \text{ y que } a \geq 0.$$

Por ejemplo,

$$\sqrt{4} = 2 \text{ porque } 2^{2} = 4 \text{ y evidentemente } 2 \geq 0.$$

Además de las raíces cuadradas, existen las raíces cúbicas, raíces cuartas y, en general, raíces *n-ésimas*. La raíz *n-ésima* de x es el número que, al ser elevado a la *n-ésima* potencia, nos produce x. Es decir,

Raíz *n-ésima*

Si n es cualquier número entero positivo, entonces la raíz *n-ésima* principal de x se define como

$$\sqrt[n]{x} = a \text{ y significa que } a^{n} = x$$

Si n es par, tenemos que considerar que $x \geq 0$ y $a \geq 0$.

De acuerdo con la definición anterior

$$\sqrt[4]{16} = 2 \text{ porque } 2^4 = 16 \text{ y } 2 \geq 0$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \text{ porque } (-3)^3 = -27$$

Es muy importante aclarar que las raíces pares de *números negativos no están definidas*. Por ejemplo, $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[6]{-64}$, etcétera, no están definidas porque no hay ningún número que al elevarse a una potencia par nos dé un número real negativo.

Propiedades de las raíces *n-ésimas*

Propiedad	Ejemplos
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\,\sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{2}{3}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar	$\sqrt[3]{(-3)^3} = -3$; $\sqrt[5]{4^5} = 4$
5. $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ si n es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = \lvert -3 \rvert = 3$

Ejemplos:

1. Utiliza las propiedades de las raíces para calcular el valor de cada una de las siguientes expresiones.

a) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$ *b*) $\dfrac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}}$ *c*) $\sqrt[6]{64}$

(Continúa)

(Continuación)

Solución:

a) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{20 \cdot 5} = \sqrt{100} = 10$ Propiedad 1

b) $\dfrac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\dfrac{32}{4}} = \sqrt[3]{8} = 2$ Propiedad 2

c) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$ Propiedad 3

2. Simplificación de expresiones algebraicas que contienen radicales.

a) $\sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{x^3x^2}$ Factorizamos la potencia cúbica más grande.

$= \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2}$ Utilizamos la propiedad 1.

$= x\,\sqrt[3]{x^2}$ Utilizamos la propiedad 4.

b) $\sqrt[4]{81x^8y^4} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{x^8} \cdot \sqrt[4]{y^4}$ Propiedad 1

$= \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{(x^2)^4} \cdot y$ Propiedad 5

$= 3x^2y$

Autoevaluación

1. Evalúa las siguientes expresiones.

a) $\sqrt[3]{-125} =$	*b*) $\sqrt{\dfrac{4}{25}} =$
c) $\sqrt[4]{256} =$	*d*) $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9} =$
e) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} =$	*f*) $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} =$

2. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\sqrt[3]{x^3} =$	*b*) $\sqrt[3]{x^3y} =$
c) $\sqrt[5]{a^6b^7} =$	*d*) $\sqrt[3]{\sqrt{64x^6}} =$
e) $\sqrt[3]{x^3y^6} =$	*f*) $\sqrt{x^4y^4} =$

Exponentes racionales

Un *exponente racional* es un *exponente fraccionario*. Por ejemplo, en $x^{2/3}$ es necesario utilizar *radicales* para expresar el exponente. Con el propósito de encontrar significado a una expresión como $x^{1/n}$, recordemos las leyes de los exponentes:

$$\left(x^{1/n}\right)^n = x^{\left(\frac{1}{n}\right)n} = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x$$

Así, a partir de la definición de raíz *n-ésima*, tenemos que

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

En general, un exponente racional se define como sigue.

Exponentes racionales

Si m y n son enteros, y $n > 0$, entonces, para cualquier exponente racional m/n expresado en su forma más sencilla, tenemos que

$$x^{m/n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$$

Esto significa que vamos a calcular la raíz *n-ésima* de x^m.
Si n es par, tenemos que considerar que $x \geq 0$.

Esta definición nos lleva a concluir que las *leyes de los exponentes* también son válidas para los *exponentes racionales*.

Ejemplos:

1. De acuerdo con la definición de exponentes racionales:

a) $3^{1/2} = \sqrt{3}$

b) $8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$

c) $4^{3/2} = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8$

d) $(64)^{-1/3} = \dfrac{1}{64^{1/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{64}} = \dfrac{1}{4}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^4}} = \dfrac{1}{a^{4/3}} = a^{-4/3}$

(Continúa)

(Continuación)

2. Las leyes para los exponentes racionales son las mismas que para los exponentes enteros.

a) $x^{1/2} \cdot x^{5/2} = x^{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}} = x^{6/2} = x^3$

b) $\dfrac{a^{2/3}a^{7/3}}{a^{5/3}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{7}{3}-\frac{5}{3}} = a^{4/3}$

c) $(a^3b^4)^{3/2} = (a^3)^{3/2}(b^4)^{3/2} = a^{3(3/2)}b^{4(3/2)} = a^{9/2}b^6$

d) $\left(\dfrac{2x^{3/4}}{y^{1/3}}\right)^3\left(\dfrac{y^4}{x^{-1/2}}\right) = 2^3\dfrac{\left(x^{3/4}\right)^3}{\left(y^{1/3}\right)^3}\left(y^4x^{1/2}\right)$

$$= 8\frac{x^{9/4}}{y}\cdot y^4x^{1/2}$$

$$= 8x^{\frac{9}{4}+\frac{1}{2}}y^{4-1}$$

$$= 8x^{11/4}y^3$$

3. Los radicales son exponentes fraccionarios.

a) $\left(2\sqrt{x}\right)\left(5\sqrt[3]{x}\right) = 10x^{1/2}x^{1/3}$

$$= 10x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 10x^{\frac{3+2}{6}}$$

$$= 10x^{5/6}$$

b) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}} = \sqrt[3]{x\cdot x^{1/2}} = \left(x^{1+\frac{1}{2}}\right)^{1/3}$

$$= \left(x^{3/2}\right)^{1/3} = x^{\frac{3}{2}\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}}$$

Autoevaluación

En los siguientes ejercicios simplifica la expresión y elimina cualquier exponente negativo. Supón que todas las letras indican números positivos.

a) $x^{2/3}x^{1/5} =$	*b*) $(4b)^{1/2}\left(8b^{2/5}\right) =$
c) $(c^2d^3)^{-1/3} =$	*d*) $\left(y^{3/4}\right)^{2/3} =$
e) $\left(2x^4y^{-4/5}\right)^3(8y^2)^{2/3} =$	*f*) $\left(\dfrac{x^6y}{y^4}\right)^{5/2} =$

Operaciones con polinomios

Cualquier **polinomio** es una suma de términos de la forma ax^n, llamados **monomios**, donde a es una constante y n es un entero no negativo.

> **Polinomio**
>
> Es una expresión algebraica que resulta de la suma o resta de uno o más monomios.

La forma general de un polinomio de grado n (donde n es un entero no negativo) en la variable x es

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x_1 + a_0$$

donde a_0, a_1,..., a_n son constantes y $a_n \neq 0$.

Un **binomio** es la suma de dos monomios, un **trinomio** es la suma de tres monomios y así sucesivamente.

Por ejemplo, $2x^2 - 3x + 4$, $2x + 5$ y $x^4 + 4x^3$ son polinomios de grado 2, 1 y 4, respectivamente; el primero es un trinomio, y los otros dos son binomios.

Términos semejantes

> Cuando dos o más términos tienen la misma parte literal, es decir, tienen las mismas variables con los mismos exponentes, se llaman **términos semejantes**.

Ejemplos:

$4a^3b^3$ y $-2a^3b^3$	son términos semejantes.
$3xy$ y $-\frac{2}{3}xy$	son términos semejantes.
$\sqrt{2}p^2q$ y $-8p^2q$	son términos semejantes.

Signos de agrupación

Estos signos ya los explicamos en un apartado anterior. Ahora es importante recordar que su función es principalmente la de indicar que las operaciones localizadas en su interior son las que se deben efectuar primero; además, si un *signo negativo* antecede a una expresión entre paréntesis, cuando eliminamos dichos paréntesis *todos los términos de adentro cambian de signo*.

( )	paréntesis
[ ]	corchetes
{ }	llaves

Por ejemplo, simplifiquemos la siguiente expresión y reduzcamos los términos semejantes:

$$\underbrace{\left\{2x^2-3xy+2y^3-\underbrace{\left[-2xy+3x^2+\underbrace{(-2x^2+7xy-4y^3)}_{\text{Primero}}\right]}_{\text{Segundo}}+3xy-2y^3\right\}}_{\text{Tercero}}$$

$$=\left\{2x^2-3xy+2y^3-\left[-2xy+3x^2\underbrace{-2x^2+7xy-4y^3}_{\substack{\text{Conservan el mismo signo}\\ \text{poeque les procede un +}}}\right]+3xy-2y^3\right\}$$

$$=\left\{2x^2-3xy+2y^3\underbrace{+2xy-3x^2+2x^2-7xy+4y^3}_{\text{Cambian de signo porque les procede un –}}+3xy-2y^3\right\}$$

$$=2x^2-3xy+2y^3+2xy-3x^2+2x^2-7xy+4y^3+3xy-2y^3$$

$$=(2-3+2)x^2+(-3+2-7+3)xy+(2+4-2)y^3$$ Agrupamos términos semejantes.

$$=x^2-5xy+4y^3$$

Suma y resta de polinomios

Cuando **sumamos** y **restamos** polinomios, lo que estamos haciendo es **combinar términos semejantes**. Para ello, utilizamos las propiedades de los números reales que vimos al principio de este curso.

Suma de polinomios

Ejemplos:

1. Calcula la suma de $(a^3-6a^2+2a+4)+(3a^3+5a^2-4a)$.

Solución:

$(a^3-6a^2+2a+4)+(3a^3+5a^2-4a)$

$=(a^3+3a^3)+(-6a^2+5a^2)+(2a-4a)+4$ Agrupamos términos semejantes.

$=4a^3-a^2-2a+4$ Combinamos términos semejantes.

2. Calcula la suma de $\left(\frac{2}{3}b^2+\frac{3}{5}b\right)+\left(7b+\frac{5}{7}b^2\right)+\left(-\frac{4}{9}b^2-\frac{8}{7}b\right)$

Solución:

$\left(\frac{2}{3}b^2+\frac{3}{5}b\right)+\left(7b+\frac{5}{7}b^2\right)+\left(-\frac{4}{9}b^2-\frac{8}{7}b\right)$

$=\left(\frac{2}{3}b^2+\frac{5}{7}b^2-\frac{4}{7}b^2\right)+\left(\frac{3}{5}b+7b-\frac{8}{7}b\right)$ Agrupamos términos semejantes.

$=\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{7}-\frac{4}{7}\right)b^2+\left(\frac{3}{5}+7-\frac{8}{7}\right)b$ Se aíslan los coeficientes fraccionarios.

$=\left(\frac{14+15-12}{21}\right)b^2+\left(\frac{21+245-40}{35}\right)b$ Se realizan las operaciones.

$=\frac{17}{21}b^2+\frac{226}{35}b$

3. **Negocios.** La utilidad U en un negocio puede obtenerse restando los costos C de su precio de venta V.

$$U=V-C$$

El costo de producir x artículos es \$2 por unidad más \$50 de gastos fijos. Si el precio de venta es de \$3, ¿cuál es su utilidad?

(Continúa)

(Continuación)

Solución:

El costo de producción es $C = 2x + 50$; las ventas totales son $V = 3x$; por consiguiente, la utilidad será

$$U = V - C = 3x - (2x + 50)$$
$$U = 3x - 2x - 50$$
$$U = x + 50$$

Ejercicios

Resuelve las siguientes adiciones de polinomios.

Operación	Solución
1. $(3x^3 - 6 + x - 2x^2) + (x^4 - x^3 + 3x^2 + 2)$	
2. $(2a - 3a^2 + 3a) + (4a^3 + 3a^2 + 2a)$	
3. $(ax - x^3) + (-5x^3 - 6x^2 - 7x) + (8x^3 + 9x^2 + 4x)$	
4. $(2a - 3a^2 - 5) + (4a^2 + 3a) + (-2a^2 + 3a)$	
5. $\left(y^2 - \frac{1}{2}y\right) + \left(\frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{4}y\right) + \left(-\frac{1}{4}y - 2y^2\right)$	

Resta de polinomios

Ejemplo:

1. Calcula la resta de $(11a^3-12a+10)-(6a^3+2a^2-5a+13)$.

Solución:

$$(11a^3-12a+10)-(6a^3+2a^2-5a+13)$$

$$=\underbrace{(11a^3-12a+10)}_{\text{Minuendo}}-\underbrace{(6a^3+2a^2-5a+13)}_{\text{Sustraendo}}$$

$$=(11a^3-12a+10)+\underbrace{(-6a^3-2a^2+5a-13)}_{\text{Los signos en el sustraendo cambian}}$$

$$=(11a^3-6a^3)+(-2a^2)+(-12a+5a)+(10-13)$$

$$=5a^3-2a^2-7a-3$$

Ejercicios

Resuelve las siguientes sustracciones de polinomios.

Operación	Solución
1. $(5a^3-6a^2+a-5)-(6a^2+2a+1+5a^3)=$	
2. $(2x^3+2x-8x^2+3)-(4x^4-6x^2+2x-8)=$	
3. $(5x^2-8x+9)-(x^3-x+2)=$	
4. $\left(\frac{1}{2}p^2-\frac{3}{4}p^2-\frac{2}{5}p\right)-\left(\frac{1}{6}p^2-\frac{1}{4}p\right)=$	

Sumas y restas combinadas. Resuelve las siguientes sumas y restas de polinomios.

Operación	Solución
1. $(3u^3+5u-1)+(5u^3-2u^2+8)-(-5u^3+6u^2+5u+6)=$	
2. $(2x^3+2x-8x^2+3)+(3x^2-x^3+2x)-(4x^4-6x^2+2x-8)=$	
3. $(5a^2-8a+1)-(a^3-a+2)+(a^3-1)=$	
4. Encuentra la utilidad U en la fabricación de un artículo cuyo costo es $C=3x+20$ y su precio de venta es $V=5x$.	

Multiplicación de polinomios

Para obtener el producto de polinomios o de otras expresiones algebraicas, es necesario utilizar varias veces la propiedad distributiva.

$$(a+b)(c+d)=c(a+b)+d(a+b)=ac+ad+bc+bd$$

Esto es equivalente a multiplicar cada uno de los términos de un factor por cada uno de los términos del otro factor, y al final sumamos estos productos.

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

Ejemplos:

1. $(2x^2)(5x-2)=2x^2(5x)+2x^2(-2)$

$$=10x^3-4x^2$$

2. $(2a-1)(3a-5) = 2a(3a-5)+(-1)(3a-5)$

$$= 6a^2 - 10a + (-3a+5)$$

$$= 6a^2 - 10a - 3a + 5$$

$$= 6a^2 - 13a + 5$$

3. $2(x-3)(x^3+x+2) = 2[x(x^3+x+2)+(-3)(x^3+x+2)]$

$$= 2[x^4 + x^2 + 2x + (-3x^3 - 3x - 6)]$$

$$= 2[x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 6]$$

$$= 2x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 2x - 12$$

Ejercicios

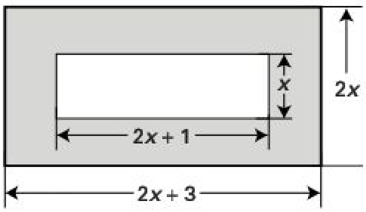
Obtén el producto de las siguientes multiplicaciones.

Multiplicación	Resultado
1. $(3x^4)(2x^3) =$	
2. $(3y)(4y^5) =$	
3. $(x)(4x-3x^2+1) =$	
4. $(x^3-3x^2+7x)(2x^3) =$	
5. $(2-5y)(3+2y) =$	
6. $(a^2-2a+4)(a-2) =$	
7. $(x+3)(x+3) =$	
8. $(x+3)(x-5) =$	
9. $\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right) =$	
10. $(x^2-6x+3)(x-2) =$	

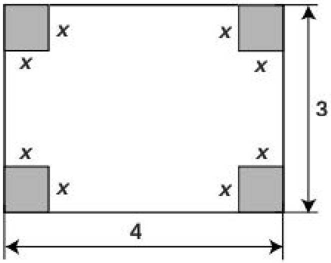
11. En relación con la figura mostrada, calcula las siguientes áreas:

a) Área del rectángulo mayor *b*) Área del rectángulo menor

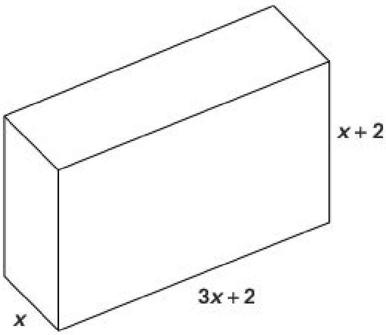
c) Área sombreada



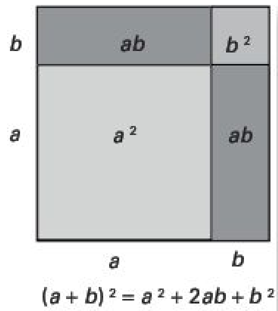
12. Calcula el área de la cruz en blanco.



13. ¿Cómo se calcularía el volumen de la figura ilustrada?



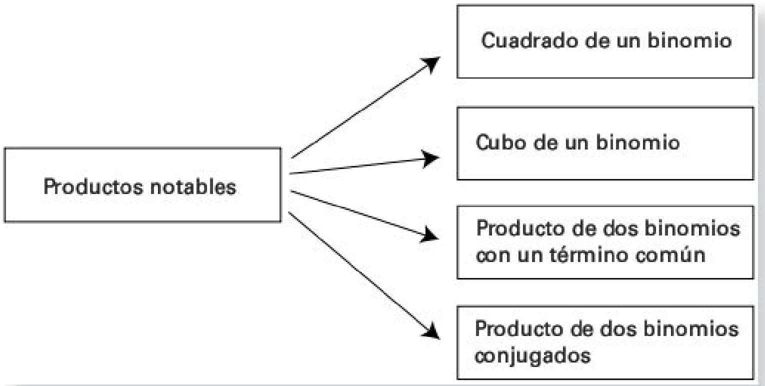
Productos notables



Los productos notables son fórmulas para obtener productos de multiplicaciones de una manera más rápida y eficiente. Esto se logra al abreviar la aplicación del algoritmo normal estudiado en apartados anteriores.

Estas fórmulas son *transformaciones algebraicas* que, con la utilización adecuada de las propiedades de los números reales, nos permiten obtener las relaciones que generan los productos correctos para la operación que definen.

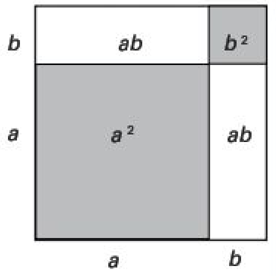
En esta parte del curso veremos algunas expresiones algebraicas cuyos productos pueden obtenerse a partir de una regla general, sin tener que realizar la multiplicación directa. Estos procesos generales se conocen como **productos notables**.



Cuadrado de un binomio

Observa la figura de la derecha y fíjate que el área es

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Esta interpretación geométrica de elevar un binomio al cuadrado se puede enunciar algebraicamente de la siguiente manera:

$$\underbrace{(a+b)^2}_{a+b \text{ al cuadrado}} = \underbrace{a^2}_{\substack{\text{Cuadrado del}\\ \text{primer término}}} + \underbrace{2ab}_{\substack{\text{Doble del primer}\\ \text{término por el segundo}}} + \underbrace{b^2}_{\substack{\text{Cuadrado del}\\ \text{segundo término}}}$$

Ejemplos:

Utilización de la regla para elevar un binomio al cuadrado.

1. $(x+3)^2 = (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2$

$\qquad = x^2 + 6x + 9$

2. $(2a-3b)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(-3b) + (-3b)^2$

$\qquad = 4a^2 - 12ab + 9b^2$

(Continúa)

(Continuación)

3. $\left(a^x - \frac{2}{3}\right)^2 = (a^x)^2 + 2(a^x)\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)^2$

$= a^{2x} - \frac{4}{3}a^x + \frac{4}{9}$

4. $(x + 2y - z)^2 = [(x + 2y) - z)]^2 = (x + 2y)^2 + 2(x + 2y)(-z) + (-z)^2$

$= x^2 + 4xy + 4y^2 - 2xz - 4yz + z^2$

La regla anterior es muy útil para facilitar el cálculo de cuadrados numéricos cuando no tenemos una calculadora a nuestro alcance. Veamos dos ejemplos:

1. $(23)^2 = (20 + 3)^2 = (20)^2 + 2(20)(3) + (3)^2 = 400 + 120 + 9 = 529$

2. $(28)^2 = (30 - 2)^2 = (30)^2 + 2(30)(-2) + (-2)^2 = 900 - 120 + 4 = 784$

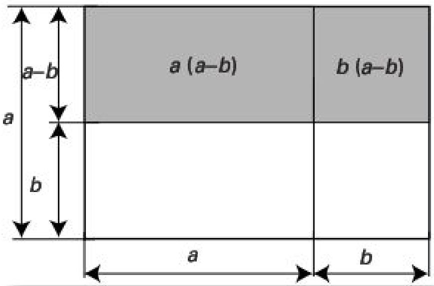
Los ejemplos nos indican que el producto que obtenemos al elevar un binomio al cuadrado está formado por tres términos: el primero y el tercero son el cuadrado de cada uno de los términos del binomio, y el segundo es el doble producto de éstos. Un trinomio con estas características se llama **trinomio cuadrado perfecto**.

Evidencias de aprendizaje

Desarrolla las siguientes expresiones.

1. $(x - 3)^2 =$
2. $(2x + 1)^2 =$
3. $(3x - 2)^2 =$
4. $(4x^2 - 3x)^2 =$
5. $(x + 2y - 3)^2 =$

Producto de dos binomios conjugados



Encuentra el área de la región sombreada en la siguiente figura realizando la operación indicada.

$$A = a(a - b) + b(a - b)$$

Como podrás constatar en la figura, la multiplicación anterior es equivalente a multiplicar $(a + b)(a - b)$:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab + b^2 = a^2 - b^2$$

Los binomios como los anteriores se llaman **conjugados** porque tienen dos términos que son exactamente iguales y los otros dos difieren sólo en el signo. Como viste en las multiplicaciones anteriores, su *producto es la diferencia de sus cuadrados.*

Regla

El producto de dos binomios conjugados da como resultado la diferencia de los cuadrados de sus términos

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos:

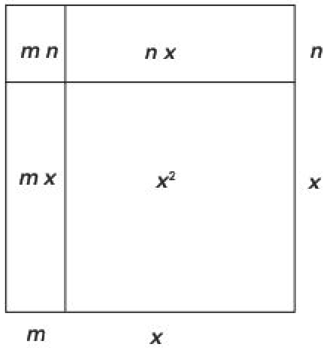
Productos de binomios conjugados.

1. $(a+3)(a-3) = a^2 - 3^2 = a^2 - 9$
2. $(2a+3b)(2a-3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$
3. $(3x-5)(3x+5) = (3x)^2 - (5)^2 = 9x^2 - 25$
4. $(2a+3b-c)(2a+3b-c) = (2a+3b)^2 - (c)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2 - c^2$

Evidencias de aprendizaje

Desarrolla las siguientes expresiones.

1. $(x-7)(x+7) =$
2. $\left(u-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right) =$
3. $(5x-4)(-5x-4) =$
4. $(x+2y-3)(x+2y+3) =$
5. $(2x^n-7)(2x^n+7) =$



Producto de dos binomios con un término común

Calcula el área A del siguiente rectángulo.

Habrás observado que hay un elemento común, la x, al sumar las áreas de cada región en las que están divididos los rectángulos. Es decir,

$$A = x^2 + mx + nx + mn = x^2 + (m + n)x + mn$$

El cálculo de este tipo de productos recibe el nombre de **binomio con un término común**, y su regla es la siguiente:

Producto de dos binomios con un término común

Cuadrado del común, más la suma de los no comunes por el común, más el producto de los no comunes.

$$(x+m)(x+n) = \underbrace{x^2}_{\text{Cuadrado del común}} + \underbrace{(m+n)x}_{\substack{\text{Suma de los no comunes}\\ \text{poe el común}}} + \underbrace{mn}_{\substack{\text{Productos de los}\\ \text{no comunes}}}$$

Ejemplos:

Observa con atención los siguientes ejemplos para que te quede claro cómo se aplica la regla del producto de dos binomios con un término común.

1. $(x + 7)(x - 5) = x^2 + (7 - 5)x + (7)(-5) = x^2 + 2x - 35$

2. $(2a + 3)(2a - 5) = (2a)^2 + (3 - 5)(2a) + (3)(-5) = 4a^2 - 4a - 15$

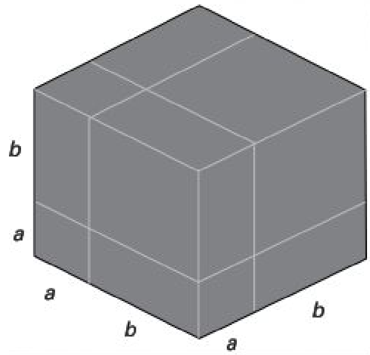
Evidencias de aprendizaje

Desarrolla las siguientes expresiones.

1. $(x-3)(x+5) =$
2. $(u+5)(u-9) =$
3. $(3x-7)(3x+2) =$
4. $(5x-4)(5x+3) =$
5. $\left(\frac{1}{2}x-3\right)\left(\frac{1}{2}x-2\right) =$

Cubo de un binomio

Otro producto notable muy útil es el **cubo de un binomio**, cuya regla se obtiene a partir del desarrollo del algoritmo normal de la multiplicación.



$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

Cubo de un binomio

El cubo del primer término, más el triple del cuadrado del primero por el segundo término, más el triple del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término.

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Ejemplos:

Uso de la regla para elevar un binomio al cubo.

1. $(2a + 3)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2(3) + 3(2a)(3)^2 + (3)^3$

$= 8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$

2. $(x - 2y)^3 = x^3 + 3x^2(-2y) + 3x(-2y)^2 + (-2y)^3$

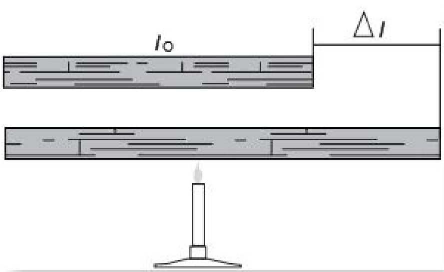
$= x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

Autoevaluación

Desarrolla las siguientes expresiones.

1. $(x + 7)^3 =$
2. $(2u - 5)^3 =$
3. $(5x^2 - 4)^3 =$

Factorización



Por lo general, los materiales se dilatan o se contraen de longitud cuando se someten a un cambio de temperatura. Por ejemplo, una barra metálica sufre un cambio de longitud $\Delta l = \alpha l_0 t - \alpha l_0 t_0$ cuando la temperatura se modifica de una temperatura inicial t_0 a una temperatura final t. ¿Cómo puedes escribir de una manera más simple esta expresión algebraica?

Actividad de investigación

Investiga qué significa α en la dilatación lineal y cuáles son los valores para el hierro, la plata el cobre y el oro.

Cuando utilizamos la propiedad distributiva de las expresiones en sentido inverso al desarrollo de la multiplicación o de los productos notables, lo que estamos realizando es un proceso que se llama **factorización**. Por ejemplo, escribimos:

$$x^2 - 4 \quad \xrightarrow{\text{FACTORIZACIÓN}} \quad = \quad \xleftarrow{\text{DESARROLLO}} \quad (x+2)(x-2)$$

Factor común en un polinomio

Compara las multiplicaciones con los factores y observa si puedes descubrir un patrón de comportamiento.

Producto	Factores
$3(x + y) = 3x + 3y$	$3x + 3y = 3(x + y)$
$2a(x + 3) = 2ax + 6a$	$2ax + 6a = 2a(x + 3)$

Lo que nos revelan los ejemplos anteriores es que tenemos que encontrar un factor común a todos los términos de la expresión y que, para poder factorizar el polinomio por completo, es necesario seleccionar el *máximo factor común*, ax^n, donde:

a es el máximo entero que divide a cada uno de los coeficientes del polinomio, y
n es el mínimo exponente de x en todos los términos del polinomio.

Ejemplos:

a) Factoriza $6x^3 + 18x^2$.

Solución:

Aquí, tenemos que 6 y 18 tienen como máximo factor común a 6, mientras que x^3 y x^2 tienen como máximo factor común a x^2 así que escribimos

> Verificamos la multiplicación
>
> $6x^2(x + 3) = 6x^3 + 18x^2$

$$6x^3 + 18x^2 = 6x^2(x + 3)$$

b) Factoriza $6x^3y^2 + 8x^2y^3 - 2xy^4$.

Solución:

Aquí, tenemos que 6, 8 y 2 tienen como máximo factor común a 2, mientras que x^3y^2, x^2y^3 y xy^4; tienen como máximo factor común a xy^2; por lo tanto, escribimos

> Verificamos la multiplicación
>
> $2xy^2(3x^2 + 4xy - y^2) =$
> $6x^3y^2 + 8x^2y^3 - 2xy^4$

$$\begin{aligned} 6x^3y^2 + 8x^2y^3 - 2xy^4 &= (2xy^2)(3x^2) + (2xy^2)(4xy) + (2xy^2)(-y^2) \\ &= 2xy^2(3x^2 + 4xy - y^2) \end{aligned}$$

Evidencias de aprendizaje

Factoriza por completo cada expresión.

1.	$9y - 18 =$
2.	$4a^2 + 32 =$
3.	$-3x^3 - 18x^6 =$
4.	$5x^7 - 15x^6 + 10x^3 - 20x^2 =$
5.	$5(y - 2) - x(y - 2) =$

Factorización por agrupación

Al parecer, un polinomio como $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ no tiene un factor común, pero si utilizamos la propiedad asociativa y después la distributiva, veremos que sí es posible factorizar. He aquí la forma de hacerlo:

$x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = (x^3 + 2x^2) + (3x + 6)$	Propiedad asociativa
$= x^2(x + 2) + 3(x + 2)$	Factor común en cada binomio
$= (x + 2)(x^2 + 3)$	Propiedad distributiva con el MFC

Ejemplo:

Factoriza $6x^2 + 2xy + -9xy - 3y^2$.

$6x^2 + 2xy + -9xy - 3y^2 = (6x^2 + 2xy) + (-9xy - 3y^2)$	Propiedad asociativa
$= 2x(3x + y) - 3y(3x + y)$	Factor común en cada binomio
$= (3x + y)(2x - 3y)$	Propiedad distributiva con el MFC

Evidencias de aprendizaje

Factoriza por agrupación.

1. $x^3 + 2x^2 + x + 2 =$

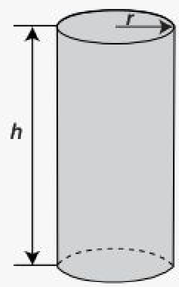
2. $y^3 - 3y^2 + y - 3 =$

3. $4a^3 + 6a^2 + 2a + 3 =$

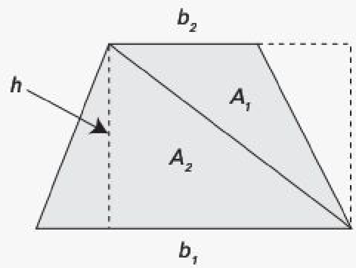
4. $3x^4 + 12x^2 + x^2 + 4 =$

5. $6x^3 + 3x^2 + 2x + 1 =$

6. La expresión $A = 2\pi\ rh + 2\pi\ r^2$ representa el área superficial de un cilindro cerrado, donde h es la altura y r es el radio del cilindro. Factoriza la expresión $A = 2\pi\ rh + 2\pi\ r^2$.

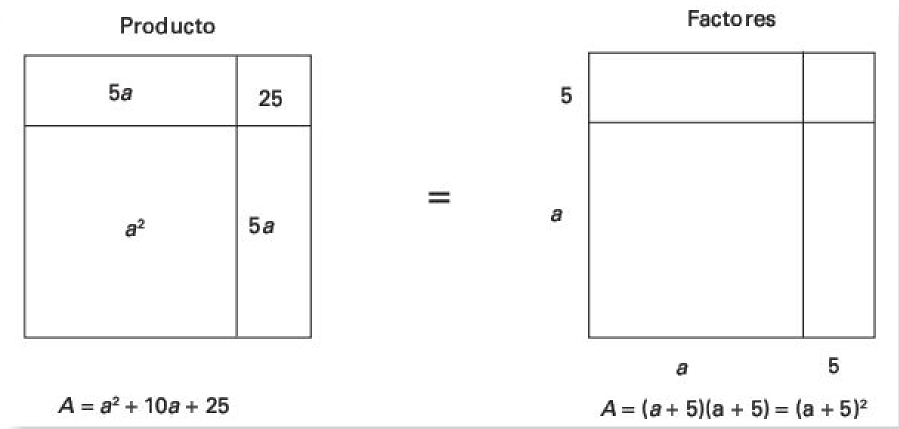


7. El área de un trapecio está dada por $A = \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h$, donde h es la altura del trapecio, y b_1 y b_2 son las longitudes de las bases. Factoriza $A = \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h$.



Factorización de un trinomio cuadrado perfecto

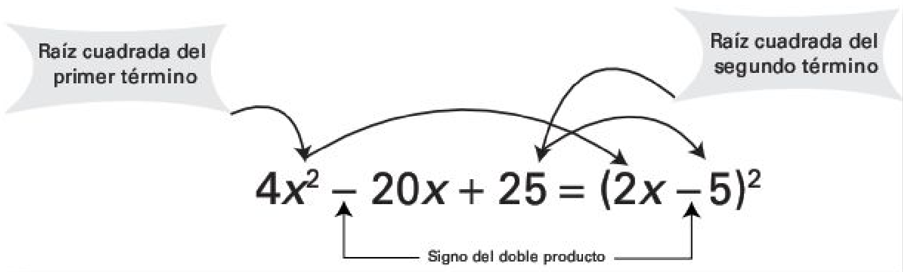
Observa los dos cuadrados dibujados a continuación y fíjate que si bien el área está expresada en dos formas diferentes, es exactamente la misma.



El modelo geométrico anterior nos indica que:

$$a^2 + 10a + 5 = (a + 5)^2$$

y que la factorización de un trinomio cuadrado perfecto se puede obtener de la siguiente manera:



Ejemplos:

Factores de un trinomio cuadrado perfecto.

a) $a^2 + 2ab + 4b^2 = \left(\underbrace{a}_{\text{Raíz de } a^2} + \underbrace{2b}_{\text{Raíz de } 4b^2} \right)^2$

b) $9x^2 + 12xy + 4y^2 = \left(\underbrace{3x}_{\text{Raíz de } 9x^2} + \underbrace{2y}_{\text{Raíz de } 4y^2} \right)^2$

Evidencias de aprendizaje

Factoriza cada trinomio cuadrado perfecto.

1.	$x^2 - 6x + 9 =$
2.	$x^2 + 4x + 4 =$
3.	$9y^2 + 42y + 49 =$
4.	$x^4 - 2x^2 + 1 =$
5.	$16a^2 + 40a + 25 =$
6.	La ecuación de costo $C(x)$ (que se lee C de x) para la producción de x artículos está dada por $C(x) = x^2 + 12x + 36$. Factoriza esta expresión.
7.	La función de demanda $D(x)$ para un producto viene dada por $D(x) = x^2 - 10x + 25$. Factoriza la expresión.

AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 4

Considera tu desempeño como estudiante e indica la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

☹ **0** Nunca 😐 **5** Algunas veces ☺ **10** Siempre

CONOCIMIENTOS Después de estudiar el bloque, ¿adquiriste los conocimientos que te permiten	
• identificar las operaciones de suma, resta y multiplicación de polinomios en una variable?	
• identificar el producto de binomios aplicando patrones de productos notables?	
• comprender las técnicas de extracción de factor común simple y por agrupación?	
• comprender las técnicas de factorización basadas en productos notables de diferencia de cuadrados y de trinomios cuadrados perfectos?	

HABILIDADES Al finalizar el bloque, ¿desarrollaste las habilidades que te permiten	
• ejecutar sumas, restas y multiplicaciones con polinomios en una variable?	
• emplear productos notables para determinar y expresar el resultado de multiplicaciones de binomios?	
• formular expresiones en forma de producto, utilizando técnicas básicas de factorización?	
• utilizar los productos notables de diferencia de cuadrados y de trinomios cuadrados perfectos?	
• establecer relaciones entre procesos inversos al multiplicar y factorizar?	

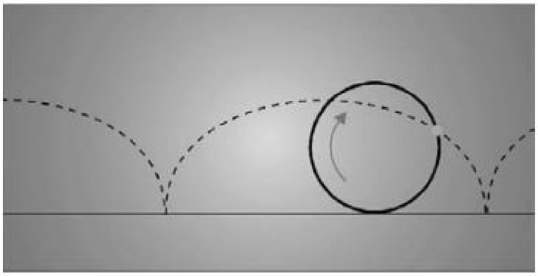
CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 1.1. El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte respecto a las **actitudes y** los **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás al estudiar el tema.

BLOQUE

5 Transformaciones algebraicas II



Unidades de competencia

En este bloque se pretende que el alumno desarrolle las siguientes competencias:

- Construir e interpretar modelos aritméticos, algebraicos y gráficos aplicando las propiedades de los números positivos y las expresiones aritméticas y algebraicas, relacionando magnitudes constantes y variables, y empleando literales para la representación y resolución de situaciones y/o problemas aritméticos y algebraicos concernientes a su vida cotidiana y escolar, los cuales le ayudarán a explicar y describir su realidad.
- Identificar las características presentes en tablas, gráficas, mapas, diagramas o textos, provenientes de situaciones cotidianas, y traducirlas a un lenguaje aritmético y/o algebraico.

Conocimientos

Al finalizar este bloque, el alumno habrá adquirido los conocimientos que le permitirán:

- Reconocer trinomios cuadrados que no son perfectos, como producto de factores lineales de las formas:

$$x^2 + bx + c$$

$$ax^2 + bx + c\text{, con } a \neq 0,\ 1$$

- Reconocer polinomios que requieren combinar técnicas.
- Identificar expresiones racionales con factores comunes y no comunes, susceptibles de ser simplificadas.
- Reconocer expresiones racionales en forma simplificada a partir de factores comunes y la división de polinomios.

Habilidades

Al finalizar este bloque, el alumno habrá desarrollado las habilidades que le permitirán:

- Factorizar trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.
- Factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0,\ 1$.
- Utilizar una o varias técnicas de transformación para descomponer un polinomio en factores.
- Obtener factores comunes, factorizando con las técnicas aprendidas, y reducirlos.
- Ejecutar divisiones entre polinomios.
- Escribir expresiones racionales en forma simplificada utilizando factores comunes y la división de polinomios.
- Expresar ideas y conceptos mediante representaciones en lenguaje común, simbólico o gráfico.
- Utilizar las tecnologías para procesar e interpretar información.
- Construir hipótesis y diseñar o aplicar modelos.

Actitudes y valores

Al finalizar este bloque, el alumno:

- Apreciará la ventaja de realizar diversas transformaciones algebraicas para simplificar o interpretar resultados.
- Asumirá una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y las habilidades con los que cuenta, dentro de distintos equipos de trabajo.
- Actuará de manera propositiva al resolver los ejercicios planteados.

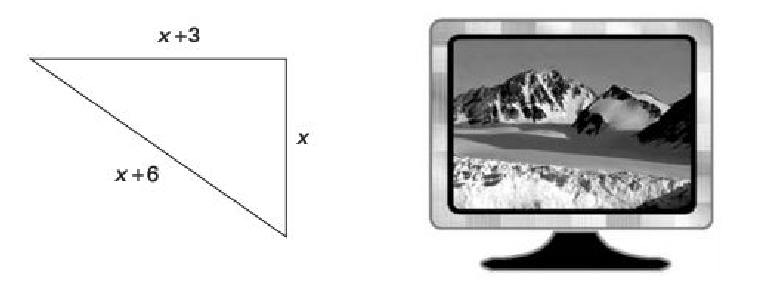
Indicadores de desempeño

Se pretende que el alumno logre:

- Resolver situaciones que incluyen magnitudes variables y utilizar las representaciones y transformaciones fundamentales del lenguaje algebraico en trinomios y en expresiones racionales.
- Simplificar procesos algebraicos mediante operaciones con polinomios y factorizaciones, y combinar estos recursos para resolver problemas.
- Redactar problemas referentes a situaciones que implican el uso y/o transformación de expresiones algebraicas.
- Describir y justificar el uso de los procedimientos empleados para resolver problemas, comprobar las soluciones y describirlas verbalmente.

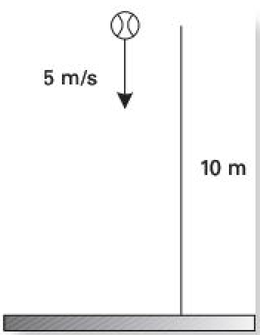
Propuesta de aprendizaje

Un fabricante de televisores desea que la pantalla rectangular tenga 3 pulgadas más de longitud que su altura, y que su diagonal sea 6 pulgadas más larga que la altura. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la pantalla?



Secuencia didáctica

- Consulta acerca del teorema de Pitágoras y utilízalo para encontrar la respuesta.
- Con la ayuda de tu maestro, reflexiona sobre la obtención de la expresión $x^2 - 6x - 27 = 0$ e intenta factorizarla.
- ¿Qué significan los factores?



Propuesta de aprendizaje

Se lanza hacia abajo un objeto con una velocidad (v_0) de 5 metros por segundo desde una altura h de 10 metros. Determina cuánto tardará en llegar al suelo.

Sugerencia: Utiliza la expresión $h = 5t^2 + v_0 t$.

Secuencia didáctica

- Sustituye v_0 por 5 metros por segundo y h por 10 metros. Comenta con tu profesor sobre esta sustitución.
- Ordena la expresión $10 = 5t^2 + 5t$ e iguala a cero. Después, factoriza la nueva expresión y reflexiona acerca de los factores esta la solución.
- ¿Por qué $5t^2 + 5t - 10 = 0$ nos da la solución?

Factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

Para factorizar un polinomio cuadrático de la forma $x^2 + bx + c$, es necesario observar que

$$(x+m)(x+n) = \underbrace{x^2}_{\text{Producto del común}} + \underbrace{(m+n)x}_{\text{Suma de los no comunes por el común}} + \underbrace{mn}_{\text{Producto de los no comunes}}$$

donde m y n son números tales que $(m+n) = b$ y $mn = c$.

Ejemplos:

Factores de $x^2 + bx + c$ por ensayo y error.

a) Factoriza $x^2 + 7x + 12$.

Solución:

Aquí, $mn = 12$ y $m + n = 7$; así que buscamos por ensayo y error factores de 12 cuya suma sea 7.

m	n	Suma
12	1	13
6	2	8
3	4	7

(Continúa)

(Continuación)

De esta manera, vemos que $m=3$ y $n=4$ son los factores de 12 cuya suma es 7. Por lo tanto,

$$x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$$

b) Factoriza $y^2-8y+15$.

Solución:

Aquí, $mn=15$ y $m+n=-8$, de manera que buscamos por ensayo y error factores de 15 cuya suma sea -8.

m	n	Suma
-1	-15	-16
-3	-5	-8

Vemos que $m=-3$ y $n=-5$ son los factores de 15 cuya suma es -8. Por consiguiente,

$$x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$$

Ejercicios

Factoriza cada uno de los siguientes trinomios.

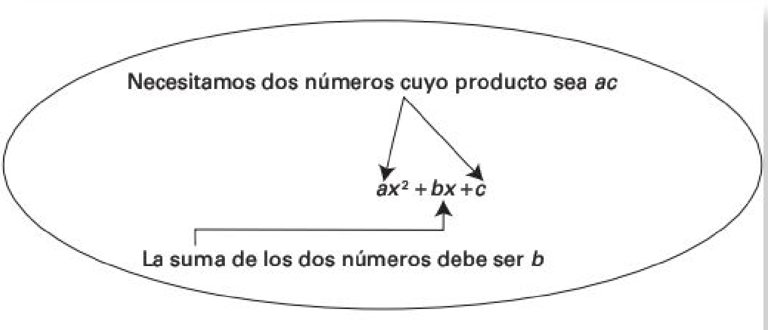
Trinomio	Factores
1. $x^2+8x+15$	
2. x^2+9x+8	
3. $y^2+y-30=$	
4. $y^2-13y+40=$	

5. La pantalla de un televisor mide 2 pulgadas más de longitud que de altura. Si la longitud diagonal de la pantalla mide 2 pulgadas más que su longitud, ¿cuál es la medida de la diagonal de esta pantalla?

Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

Un polinomio cuadrático de la forma $ax^2 + bx + c$. donde $a \neq 1$, es factorizable si existen dos enteros con producto $\boldsymbol{ac}$ y la suma de los dos números es $\boldsymbol{b}$.

Un diagrama puede ayudarte a comprender mejor esta prueba.



Ejemplos:

a) Factoriza $6x^2 + 7x - 5$.

Solución:

Aquí, $\boldsymbol{ac} = -30$ y los factores de -30 deben sumar 7, es decir, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = 7$; de manera que

a	c	ac	$a + c = b$
10	-3	$(10)(-3) = -30$	$10 + (-3) = 7$

(Continúa)

(Continuación)

Por lo tanto, $6x^2+7x-5$ es factorizable y los números que nos sirven son 10 y –3 porque sumados dan 7. Por consiguiente,

$$6x^2+7x-5 = \underbrace{6x^2+10x}_{\text{Se agrupan}} \quad \underbrace{-3x-5t}_{\text{Se agrupan}} \qquad \text{Agrupamos términos en pares.}$$

$$= 2x(3x+5)-(3x+5) \qquad \text{Factorizamos.}$$

$$= (3x+5)(2x-1)$$

Cuando no se encuentran dos factores cuyo producto sea ac y cuya suma $a+c$ sea b, *el trinomio no es factorizable.*

b) Factoriza $3x^2-11x+6$.

Solución:

Aquí, $ac=18$ y los factores de 18 deben sumar –11, es decir, $a+c=-11$; de manera que

a	c	ac	$a+c=b$
–9	–2	18	$-9-2=-11$

Esto indica que $3x^2-11x+6$ es factorizable, y los números que nos sirven son –9 y –2 porque sumados dan –11. Por consiguiente,

$$3x^2-11x+6 = 3x^2-9x-2+6 \qquad \text{Agrupamos términos en pares.}$$

$$= 3x(x-3)\;-2(x-3) \qquad \text{Factorizamos.}$$

$$= (x-3)(3x-2)$$

Ejercicios

Factoriza, siempre que sea posible, cada una de las siguientes expresiones.

Trinomio	a	c	ac	$a+c=b$	Factores
1. $5y^2+4y-12$					
2. $4a^2+12a+9$					
3. $4t^2-12t+9$					
4. $2x^2-7x-4$					
5. $4x^2-4x-3$					
6. $5t^2+7t+2$					

Factorización de polinomios que requieren combinar técnicas

A veces, al factorizar un polinomio, es posible factorizar de nuevo la expresión resultante, lo cual permite simplificar aún más la expresión. A este proceso de factorizar un polinomio hasta que ya no sea posible se le llama **factorización completa**.

Ejemplos:

Factorización total.

a) Factoriza $2x^4-8x^2$.

Solución:

$2x^4-8x^2=2x^2(x^2-4)$ Factor común: $2x^2$.

$=2x^2(x+2)(x-2)$ Factorización de x^2-4 como $(x+2)(x-2)$.

(Continúa)

(Continuación)

b) Factoriza $4x^3 - 20x^2 + 24x$.

Solución:

$4x^3 - 20x^2 + 24x = 4x(x^2 - 5x + 6)$ Factor común: $4x$.

$= 4x(x-3)(x-2)$ Factorización de $x^2 - 5x + 6$ como $(x-3)(x-2)$.

Ejercicios

Factoriza totalmente cada una de las siguientes expresiones.

Expresión	Factores
1. $2x^3 - 8xy^5 =$	
2. $a^4 - 1 =$	
3. $x^2 - 10x + 25 - 36y^2 =$	
4. $4x^2 - 20x + 24 =$	
5. $2x^2 + 16x + 30 =$	

Aplicación. El cambio de energía cinética de un móvil de masa m con velocidad inicial v_1 y velocidad final v_2 está dada por

$$E_c = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

a) Factoriza esta expresión.

b) ¿Qué energía cinética alcanza desde el reposo un automóvil que pesa 1,000 kg hasta llegar a una velocidad de 80 kilómetros por hora?

Simplificación de fracciones racionales (fracciones algebraicas)

Cuando tratamos con el cociente de dos expresiones algebraicas, estamos trabajando con una **expresión fraccionaria** en la que el valor del denominador no es cero.

Si el numerador y el denominador de la fracción son polinomios, la fracción se llama **expresión racional**. Por ejemplo,

$$\frac{x^3-2x+5}{x-3}$$

Fíjate que para que nuestra expresión racional tenga sentido, debemos considerar valores para el denominador en los que $x \neq 3$. (*Recuerda que el denominador cero no está definido*).

Para simplificar expresiones racionales es conveniente que tanto el numerador como el denominador tengan factores comunes; por lo tanto, utilizaremos la propiedad básica siguiente:

$$\frac{a\cancel{c}}{b\cancel{c}}=\frac{a}{b}$$

Ejemplos:

Simplificación de expresiones racionales.

a) $$\frac{4xy}{2ax^2+2x^3}=\frac{\cancel{2}\cdot 2\cdot \cancel{x}\cdot y}{\cancel{2}\cdot x\cancel{^2}(a+x)}$$
$$=\frac{2y}{x(a+x)}$$

(Continúa)

(Continuación)

b) $$\frac{1-a^2}{a^2+2a+1}=\frac{\cancel{(1+a)}(1-a)}{\cancel{(a+1)}(a+1)}$$
$$=\frac{1-a}{1+a}$$

c) $$\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\frac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}}$$
$$=\frac{(x+3)}{(x+2)}$$

Aplicación. Una compañía estima que el costo en dólares de producir x artículos es:

$$C(x)=1,300+x+0.0005x^2$$

Encuentra el costo promedio de producir 500 artículos.

Solución:

Llamemos $c(x)$ al costo promedio; de esta forma:

$$c(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{1,300+x+0.0005x^2}{x}=\frac{1,300}{x}+1+0.0005x$$

Para producir 500 artículos, la compañía puede calcular su costo promedio así:

$$c(x)=\frac{1,300}{500}+1+0.0005(500)=3.85 \text{ dólares por artículo}$$

Ejercicios

Simplifica cada una de las siguientes expresiones.

Expresión	Resultado
1. $\frac{2x^3}{x}=$	

2. $-\dfrac{18x^3}{24x^2}=$	
3. $\dfrac{3x^2-3x}{3x}=$	
4. $\dfrac{3x}{3x^2-3x}=$	
5. $\dfrac{-2x}{4x^2+2x^3}=$	
6. $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}=$	
7. $\dfrac{x^2-4}{-x^2-4x-4}=$	
8. $\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-4x+2}=$	
9. $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}=$	
10. $\dfrac{2x^3-x^2-6x}{2x^2-7x+6}=$	

Aplicaciones

11. El costo de producir x unidades de un producto es $C(x)=21.4x-0.002x^2$. Determina el costo promedio para un nivel de producción de 1,000 unidades.

12. El gasto en publicidad nacional de una compañía viene dado por el polinomio $N(t)=15+2.5t-0.065t^2$ en miles de pesos. Por otro lado, el gasto en publicidad local es $L(t)=10+2.5t-0.085t^2$ en miles de pesos, donde t es el número de años después de 1998.

a) ¿Qué cantidad se gastó en publicidad nacional en 1998 $(t=0)$?

b) ¿Qué cantidad se gastó en publicidad local en 1998 $(t=0)$?

c) ¿Qué significa la expresión racional $\dfrac{N(t)}{L(t)}$?

División de polinomios

Polinomio entre monomio

Para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada término del polinomio entre el monomio, expresando el resultado como una serie de divisiones de monomios.

Ejemplos:

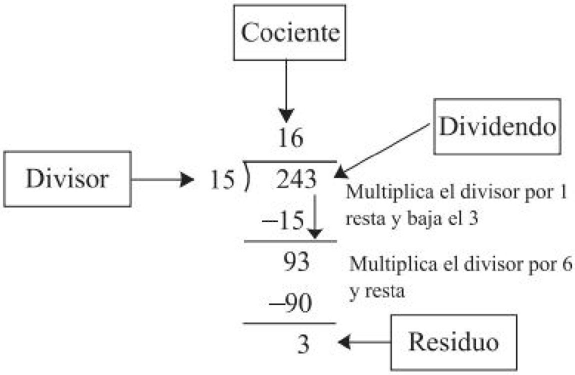
$$(9x^4-6x^3+4x^2)\div(3x^2)=\frac{9x^4-6x^3+4x^2}{3x^2}$$

$$=\frac{9x^4}{3x^2}-\frac{6x^3}{3x^2}+\frac{4x^2}{3x^2}$$

$$=3x^2-2x+\frac{4}{3}$$

Polinomio entre polinomio

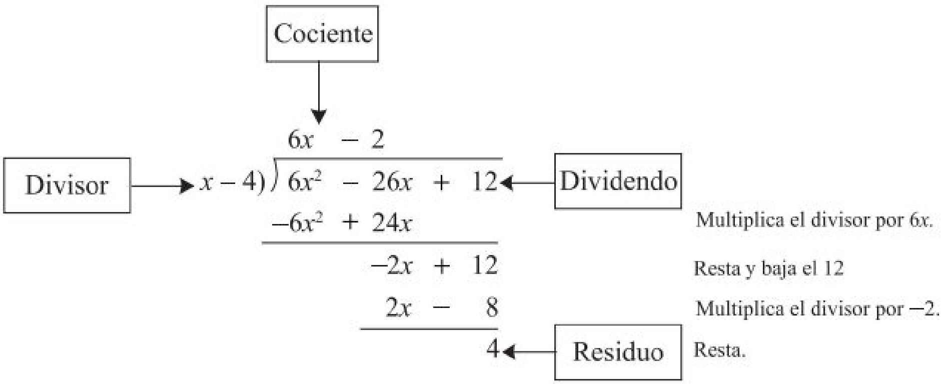
En la división de un polinomio entre otro polinomio procedemos de manera muy semejante a la división larga en aritmética. Recordemos cómo es este procedimiento mediante un ejemplo.



La división anterior se puede expresar también como

$$\frac{243}{15}=16+\frac{3}{15}=16+\frac{1}{5}$$

Con la siguiente ilustración vamos a recordar la división larga de un polinomio entre otro polinomio. *Primero ordenamos el dividendo y el divisor en forma descendente.*



El resultado de la división anterior es

$$\frac{6x^2-26x+12}{x-4}=6x-2+\frac{4}{x-4}$$

Multiplicando por $(x-4)$ ambos lados de la igualdad, la división se puede escribir así:

$$6x^2-26x+12=(6x-2)(x-4)+4$$

De hecho, puedes multiplicar el lado derecho de la igualdad para comprobar la división.

Ejercicios

1. Efectúa las siguientes divisiones.

División	Resultado
a) $\dfrac{18x^4-13x^3+5x^2}{3x^2}=$	
b) $\dfrac{20a^4-5a^5+8a^7}{4a^2}=$	
c) $\dfrac{-3x^2-5x-10}{5x}=$	

2. Realiza las siguientes divisiones de polinomios.

a) $(4x^3+5x-6)\div(2x-3)$

b) $(20a^4 - 5a^3 + 8a - 3) \div (4a^2 - 3)$
c) $(5x^3 - 2x^2 + 3x - 4) \div (x^2 - 2x + 1) =$

AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 5

Considera tu desempeño como estudiante e indica la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

☹ **0** Nunca ☺ **5** Algunas veces ☺ **10** Siempre

CONOCIMIENTOS Después de estudiar el bloque, ¿adquiriste los conocimientos que te permiten	
• reconocer trinomios cuadrados que no son perfectos, como producto de factores lineales?	
• identificar expresiones racionales con factores comunes y no comunes, susceptibles de ser simplificadas?	
• reconocer expresiones racionales en forma simplificada a partir de factores comunes y la división de polinomios?	

HABILIDADES Al finalizar el bloque, ¿desarrollaste las habilidades que te permiten	
• factorizar trinomios de la forma $x^2 + bx + c$	
• utilizar una o varias técnicas de transformación para descomponer un polinomio en factores?	
• obtener factores comunes, factorizando con las técnicas aprendidas, y reducirlos?	
• ejecutar divisiones entre polinomios?	
• escribir expresiones racionales en forma simplificada utilizando factores comunes y la división de polinomios?	
• expresar ideas y conceptos mediante representaciones en lenguaje común, simbólico o gráfico?	
• utilizar las tecnologías para procesar e interpretar información?	
• construir hipótesis y diseñar o aplicar modelos?	

CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 0.9. El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte respecto a las **actitudes** y los **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás al estudiar el tema.

BLOQUE 6

Ecuaciones lineales I

Unidades de competencia

En este bloque se pretende que el alumno desarrolle las siguientes competencias:

- Construir e interpretar modelos aritméticos, algebraicos y gráficos aplicando las propiedades de los números positivos y las expresiones aritméticas y algebraicas, relacionando magnitudes constantes y variables, y empleando literales para la representación y resolución de situaciones y/o problemas aritméticos y algebraicos concernientes a su vida cotidiana y escolar, los cuales le ayudarán a explicar y describir su realidad.
- Identificar las características presentes en tablas, gráficas, mapas, diagramas o textos, provenientes de situaciones cotidianas, y traducirlas a un lenguaje aritmético y/o algebraico.

Conocimientos

Al finalizar este bloque, el alumno habrá adquirido los conocimientos que le permitirán:

- Analizar y modelar situaciones empleando ecuaciones lineales.
- Describir técnicas para resolver ecuaciones lineales en una variable.
- Identificar la relación entre funciones y ecuaciones lineales.
- Reconocer la función lineal $y = mx + b$ y el caso particular de $mx + b = 0$.
- Identificar los parámetros m y b para determinar el comportamiento gráfico de la función lineal.
- Reconocer diversas técnicas para graficar la función lineal.

Habilidades

Al finalizar este bloque, el alumno habrá desarrollado las habilidades que le permitirán:

- Aplicar diversas técnicas para resolver ecuaciones lineales en una variable.
- Formular y resolver problemas, con técnicas algebraicas, en situaciones que se representan mediante ecuaciones lineales.
- Utilizar los parámetros m y b para determinar el comportamiento de la gráfica de la función lineal.
- Aplicar diversas técnicas para graficar la función lineal.
- Transitar de ecuaciones a funciones lineales, y viceversa, al modelar y solucionar diversas situaciones.
- Explicar cómo será la gráfica de la función lineal a partir de los parámetros m y b.

Actitudes y valores

Al finalizar este bloque, el alumno:

- Valorará la importancia de la relación entre funciones y ecuaciones lineales para examinar y solucionar situaciones.
- Apreciará las representaciones gráficas de las funciones como instrumento de análisis visual de su comportamiento.
- Apreciará la utilidad de las técnicas algebraicas de resolución de ecuaciones para simplificar procesos y obtener soluciones precisas.
- Asumirá una actitud de apertura que favorece la resolución de problemas.
- Propondrá maneras creativas de resolver problemas.

Indicadores de desempeño

Se pretende que el alumno logre:

- Utilizar la relación matemática entre dos magnitudes linealmente interdependientes para calcular una de ellas a partir de la otra y realizar tabulaciones y gráficas de funciones.
- Describir el comportamiento de las variables y los resultados obtenidos al resolver problemas de ecuaciones y/o funciones lineales.

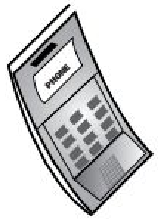
(Continúa)

(Continuación)

- Emplear propiedades de las igualdades al resolver ecuaciones lineales.
- Elaborar gráficas de funciones lineales mediante intersecciones con los ejes y/o la pendiente al resolver situaciones.
- Redactar y resolver problemas referentes a situaciones que requieren del uso de ecuaciones y/o de funciones lineales.
- Comprobar las soluciones de un problema en el modelo lineal para obtener su solución y explicar por qué algunos resultados del modelo lineal son inadmisibles en el contexto del problema.
- Identificar y utilizar escalas de equivalencias en gráficas, tablas y mapas para la conversión de unidades en modelos lineales, algebraicos o gráficos, los cuales representan situaciones en su vida cotidiana.
- Utilizar diagramas para expresar la relación entre los datos y las incógnitas en problemas de mezclas, velocidades y movimiento rectilíneo, entre otros.

Propuesta de aprendizaje

Telefonía. Supón que quieres rentar un servicio de telefonía móvil. ¿Qué te conviene más: pagar \$75 de renta al día más \$1.50 por minuto, o pagar \$95 diarios sin límite de minutos en el día?



Secuencia didáctica

- Define como x el número de minutos que utilices en un día y escribe una expresión algebraica que te permita calcular el costo total de la primera opción.
- Escribe una relación de igualdad entre la expresión obtenida en el paso anterior y los \$95 de la segunda opción.
- Con la ayuda de tu maestro, encuentra el valor de x en la igualdad generada en el paso anterior.
- Reflexiona junto con tus compañeros si el valor de x te ayuda a determinar la opción que más te conviene para planear el número de minutos diarios que deseas hablar.
- Completa la siguiente tabla y analiza algunas opciones en cuanto al número de minutos diarios que podrías hablar con el primer plan.

Número de minutos (x)	10	20	30	40	50	60
Costo $= 75 + 1.5x$	\$90					

Actividad de investigación

Consulta en Internet los siguientes conceptos: *pendiente*, *función lineal* y *ecuación lineal*. Recuerda que debes ser cuidadoso al elegir tus fuentes de información, pues no todo lo que aparece en Internet es digno de crédito. Para este caso particular, es conveniente que elijas enciclopedias o diccionarios en línea. Además, recuerda que siempre debes citar tus fuentes precisas de información.

Modelado y análisis de ecuaciones lineales

En esta sección resolverás situaciones en las que se apliquen las ecuaciones lineales o de primer grado con una incógnita.

Por ejemplo, observa la figura del anuncio en esta página; nos dice que se descuentan \$40 del precio original de una lata de impermeabilizante y que ahora su precio es de \$79.99. ¿Cuál era el precio anterior p de la lata?

Solución:

Puesto que el precio p se rebajó \$40, entonces el nuevo precio es $p - \$40$. Como el nuevo precio es \$79.99, tenemos que

$$p - 40 = 79.99$$

Aplicando la propiedad aditiva de las igualdades, sumamos 40 en ambos lados de la igualdad y obtenemos el precio original p:

$$p - 40 + 40 = 79.99 + 40$$

$$p = 119.99$$

Por lo tanto, el precio anterior de la lata de impermeabilizante era de \$119.99.

Desde luego, éste es un ejemplo muy elemental de la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, pero es importante que te familiarices con su análisis y su operatividad para que tengas mejores resultados en su aplicación.

Una **ecuación** es un enunciado que establece que dos expresiones matemáticas son iguales, por ejemplo, en la situación anterior,

$$p - 40 = 79.99$$

es una *ecuación* y, como vimos, su solución simplemente expresa una relación de igualdad entre dos cantidades que son fáciles de calcular e ilustra el patrón de comportamiento de este tipo de relaciones.

La mayor parte de las ecuaciones que se estudian en álgebra contienen variables, las cuales generalmente son letras que representan cantidades numéricas. En las ecuaciones

$$x(x - 4) = x^2 - 4x \qquad\qquad 2y + 3 = 7$$

las letras x y y son variables. En la expresión $x(x - 4) = x^2 - 4x$ estamos representando la propiedad distributiva de la multiplicación, y es verdadera para cualquier valor de x; en este caso, la ecuación recibe el nombre de **identidad**.

En el caso de $2y + 3 = 7$ existe un solo valor, $y = 2$, que hace que la igualdad sea verdadera y se llama **solución o raíz de la ecuación**.

Ecuaciones equivalentes

Cuando dos ecuaciones tienen las mismas soluciones, se dice que son **equivalentes**. Para encontrar su solución, intentamos una equivalencia más sencilla y que contenga la variable sola en uno de los lados del signo de igualdad (=). Además, es indispensable utilizar de forma adecuada las propiedades de la igualdad.

Como sabemos, las propiedades de la igualdad establecen que, al resolver una ecuación, deben *efectuarse las mismas operaciones en ambos lados de la igualdad.* Por ejemplo, al resolver $3x+5=26$, primero tenemos que sumar (−5) y luego multiplicar por $\frac{1}{3}$ en ambos lados de la igualdad.

Propiedades de la igualdad

1. Si $a=b$, entonces, $a+c=b+c$

2. Si $a=b$, entonces, $ac=bc$

$$3x+5+(-5)=26+(-5) \qquad \text{Sumamos } (-5).$$

$$3x=21$$

$$\frac{1}{3}\cdot 3x=\frac{1}{3}\cdot 21 \qquad \text{Multiplicamos por } \left(\frac{1}{3}\right).$$

$$x=7 \qquad \text{Simplificamos.}$$

Para verificar si la solución es correcta, sustituimos en la ecuación el valor de $x=7$, y la parte izquierda de la igualdad debe ser igual que la de la derecha.

$$x=7$$
$$\downarrow$$
$$3(7)+5=26$$
$$26=26 \qquad \text{¡correcto!}$$

Técnicas para resolver ecuaciones lineales

La clase más sencilla de ecuaciones son las **ecuaciones lineales o de primer grado**. Una ecuación lineal es de la forma $ax+b=0$, donde a y b representan números reales, $a\neq 0$, y x es la incógnita que hay que definir.

Ejemplos:

1. Resuelve la ecuación $2x-4=5x+8$.

Solución:

Hay que buscar una ecuación equivalente de forma que en un lado tenga los términos en x y del otro los valores constantes.

$2x-4=5x+8$	
$(2x-4)+4=(5x+8)+4$	Suma 4 en ambos lados.
$2x=5x+12$	Simplifica.
$2x-5x=(5x+12)-5x$	Resta $5x$ en ambos lados.
$-3x=12$	Simplifica.
$\left(-\frac{1}{3}\right)(-3x)=(12)\left(-\frac{1}{3}\right)$	Multiplica por $\left(-\frac{1}{3}\right)$.
$x=-4$	Simplifica.

2. Resuelve la ecuación $5(x+2)=3(x+1)+9$.

$5(x+2)=3(x+1)+9$	
$5x+10=3x+3+9$	Propiedad distributiva.
$5x+10=3x+12$	Simplifica.
$5x+10-10=3x+12-10$	Resta 10 en ambos lados.
$5x=3x+2$	Simplifica.
$5x-3x=3x-3x+2$	Resta $3x$ en ambos lados.
$2x=2$	Simplifica.
$\frac{2x}{2}=\frac{2}{2}$	Divide entre 2 en ambos lados.
$x=1$	Simplifica.

Comprobación:

$$\boxed{x=1}$$
$$\downarrow$$
$$5(1+2)=3(1+1)+9$$
$$5(3)=3(2)+9$$
$$15=15 \qquad \text{¡verdadero!}$$

Ejercicios

Resuelve las siguientes ecuaciones.

Ecuación	Solución
1. $3x-12=0$	
2. $-3x+1=-9$	
3. $8t+4=15t-10$	
4. $3x+4=x+10$	

(*Continúa*)

(*Continuación*)

5. $4u - 7 = 6u + 9$	
6. $10 - 3z = 8 - 6z$	
7. $5(x+2) = 3(x+3) - 1$	
8. $5(4 - 3a) = 7(3 - 4a)$	

Propuesta de aprendizaje

Eficiencia. Una máquina trilladora de trigo, designada como A, puede hacer un trabajo en 3 días y otra, llamada B, puede efectuarlo en 5 días. ¿En cuánto tiempo terminarán el trabajo entre ambas?

Secuencia didáctica

- Modelo verbal: Tiempo total del trabajo es igual al tiempo empleado por ambas máquinas.
- Designa como x el tiempo total para realizar el trabajo.
- Estarás de acuerdo en que la máquina A realiza $\frac{1}{3}x$, y la máquina B realiza $\frac{1}{5}x$, y entre ambas máquinas efectúan el 100% del trabajo.
- Con el apoyo de tu maestro plantea una ecuación y resuélvela.

Actividad de investigación

¿Cuál es la función de una máquina trilladora de trigo?
¿Qué importancia económica y alimenticia tiene la producción de trigo en nuestro país?
¿Cuáles países son los mayores productores de trigo?

Ecuaciones lineales con coeficientes fraccionarios

Ejemplo:

Resuelve $\frac{3}{4}+\frac{x}{5}=1$.

Solución:

$(20)\frac{3}{4}+(20)\frac{x}{5}=1(20)$	Multiplica por el MCD = 20.
$15+4x=20$	Simplifica.
$15-15+4x=20-15$	Resta 15 en ambos lados.
$4x=5$	Simplifica.
$\frac{4x}{4}=\frac{5}{4}$	Divide entre 4 en ambos lados.
$x=\frac{5}{4}$	Simplifica.

El MCD de 4 y 5 es 20

$$\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & \end{array} \qquad (2^2)\,(5)=20$$

Comprobación

$$\boxed{x=\frac{5}{4}}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{3}{4}+\frac{\frac{5}{4}}{5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{4}=1$$

¡Verdadero!

Ejercicios

Resuelve las siguientes ecuaciones.

Ecuación	Solución
1. $\frac{3x+5}{3}+\frac{x+3}{3}=12$	
2. $\frac{x}{3}-\frac{x}{2}=1$	
3. $\frac{u+1}{4}-\frac{2u-2}{3}=3$	
4. $\frac{2k-1}{3}=\frac{k-4}{12}$	

Aplicaciones

Considera el siguiente diagrama como un sistema de acceso a la resolución de problemas aplicados.

Modo verbal o gráfico → ¿Qué conocemos? ¿Qué queremos? → Ecuación algebraica → Solución

Ejemplos:

1. José tiene un trabajo en el que gana $120,000 anuales, lo que incluye un bono de $10,000 al final del año. Si recibe un pago quincenal, ¿cuál es el ingreso bruto que recibe en cada cheque?

Modelo verbal

Ingreso por año = 24 *pagos* + *bono*

¿Qué conocemos?

Ingreso por año = $120,000

Bono = $10,000

¿Qué queremos?

Cantidad en cada cheque = x

Ecuación

$$\$120{,}000 = 24x + 10{,}000$$

Solución

Utilizando las técnicas usadas en la resolución de ecuaciones tenemos que

$$x = \frac{12{,}0000 - 10{,}000}{24} = \$4{,}583.33$$

El ingreso por cada cheque es de $4,583.33

2. Roberto invitó al cine a su novia y durante la función compraron tres refrescos del mismo precio y dos bolsas de palomitas de $22 cada una. Si Roberto gastó $100 en total, ¿cuánto costó cada refresco?

Modelo verbal

Gasto total = 2 *bolsas de palomitas de* $22 *cada una* + *refrescos*

¿Qué conocemos?

Gasto total = $100

Costo de las palomitas = (2)($22) = $44

¿Qué queremos?

Precio de cada refresco = x

(Continúa)

(Continuación)

Ecuación

$$\$100 = \$44 + 3x$$

Solución

Utilizando las técnicas usadas en la resolución de ecuaciones tenemos que

$$x = \frac{100 - 44}{3} = \$18.66$$

Cada refresco costó $18.66.

3. Silvia invierte $100,000 en dos cuentas diferentes; en una de ellas le pagan el 6% anual de interés simple y en la otra el 5%. Si el interés total es de $5,700 al año, ¿cuánto dinero está invertido en cada una de las cuentas?

Modelo verbal

Interés total generado por $100,000 *dividido en dos cuentas.*

¿Qué conocemos?

Dinero invertido = $100,000

Tasa de interés de una cuenta = 6%

Tasa de interés de la otra cuenta = 5%

Interés total recibido = $5,700

¿Qué queremos?

Cantidad invertida al 6% = x
Cantidad invertida al 5% = $100,000 − x

Ecuación

$$0.06x + 0.05(100,000 - x) = 5,700$$

Solución

$$0.06x + 5,000 - 0.05x = 5,700$$

$$0.01x + 5,000 = 5,700$$

$$0.01x = 5,700 - 5,000 = 700$$

$$x = \frac{700}{.01} = 70,000$$

$$100,000 - x = 100,000 - 70,000 = 30,000$$

Silvia invirtió \$70,000 al 6% y \$30,000 al 5%.

4. Un autobús recorre la distancia de Chihuahua a Ciudad Juárez a una velocidad promedio de 95 km/hr, y de regreso viaja a una velocidad promedio de 90 km/hr. Si todo el recorrido duró 8 horas, ¿cuál es la distancia de Chihuahua a Ciudad Juárez? va

Modelo verbal o gráfico

Tiempo total del viaje = Tiempo de ida + tiempo de regreso

¿Qué conocemos?

Velocidad promedio de ida = 95 km/hr

Velocidad promedio de regreso = 90 km/hr

Tiempo total del viaje = 8 *hrs*

¿Qué queremos?

Distancia de Chihuahua a Juárez = s

Ecuación

La relacion de velocidad es $v = \frac{s}{t}$, entonces, el tiempo t es $t = \frac{s}{v}$; el tiempo de ida es $t_i = \frac{s}{v_i}$ y el de regreso $t_r = \frac{s}{v_r}$.

Por lo tanto,

$$\frac{s}{95} + \frac{s}{90} = 8$$

Solución

$$\frac{s}{95} + \frac{s}{90} = 8$$

$$90s + 95s = 68,400$$

$$s = \frac{68,400}{185} = 369.72 \approx 370$$

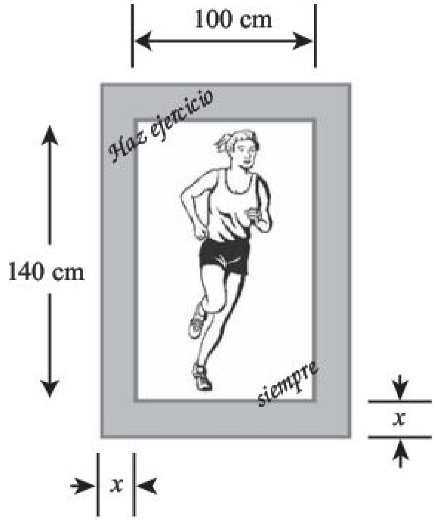
La distancia de Chihuahua a Ciudad Juárez es de 370 km aproximadamente.

Evidencias de aprendizaje

En cada una de las siguientes situaciones, completa los datos que faltan en la tabla para encontrar la solución.

1. **Dimensiones de un anuncio.** Un anuncio tiene impresa su parte central con forma rectangular, que mide 100 por 140 centímetros, y está enmarcada con una banda de ancho constante. El perímetro del cartel es 1.5 veces el del área impresa. ¿Cuál es el ancho de la banda, y cuáles son las dimensiones del cartel?

Modelo verbal o gráfico



¿Qué conocemos?

Perímetro del área impresa $= 2\cdot 100 + 2\cdot 140$

$= 480$

Perímetro del cartel = 1.5 *veces el perímetro del área impresa* = (1.5)(480)=720.

¿Qué queremos?

Ancho de la banda $= x$

Dimensiones del cartel
$(100+2x)(140+2x)$

Perímetro $= 2(100+2x)+2(140+2x)$

Ecuación

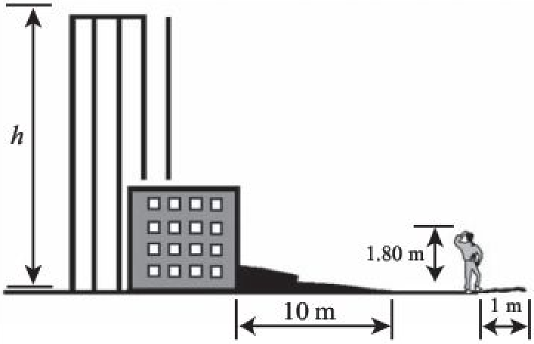
Solución

Ancho de la banda =

Dimensiones del cartel =

2. **Altura de un edificio.** Se desea calcular la altura de un edificio. Para lograrlo, una persona de 1.80 metros mide la sombra que proyecta el edificio, la cual resulta ser de 10 metros, mientras que su propia sombra mide 1 metro. ¿Cuál es la altura h del edificio?

Modelo verbal o gráfico



¿Qué conocemos?

Sombra del edificio =

Sombra de la persona =

Altura de la persona =

¿Qué queremos?

Altura del edificio = h

Ecuación

Considerando las razones entre triángulos

$$\frac{h}{10} = \frac{1.80}{1}$$

Solución

Altura del edificio =

3. **Mezclas y concentraciones.** Con el propósito de elaborar oro blanco para las amalgamas dentales, los especialistas mezclan oro puro y platino. Supongamos que se desea elaborar 10 onzas troy de oro blanco para vender a \$415 la onza. Si el oro puro cuesta \$400 la onza y el platino a \$475 la onza, ¿qué cantidad de cada uno se debe mezclar?

Modelo verbal

10 *onzas de oro blanco a* \$415 *cada onza debe ser igual a la mezcla de una cantidad de oro puro a* \$400 *por onza más otra cantidad de platino a* \$475 *la onza.*

¿Qué conocemos?

Precio de 10 *onzas de oro blanco* = \$415

Precio de una onza de oro puro = \$400

Precio de una onza de platino = \$475

¿Qué queremos?

Cantidad necesaria de oro puro = x

Cantidad necesaria de platino = $10 - x$

Ecuación	Solución
Sugerencia: Suma el costo de cada uno de los metales que van a componer la mezcla, y el total debe ser \$4,150.	

4. Saúl revisa su cuenta bancaria y observa que tiene \$12,378.00 después de que el banco le ha abonado sus respectivos intereses del 8%. ¿Cuánto tenía antes de que le depositaran los intereses? A continuación aparece el resultado; sin embargo, lo importante es que expongas la forma como se llega a ese resultado.

5. La suma de 3 números consecutivos (n, $n, +1$, $n+2$) es 156. ¿Cuáles son esos números? Plantea la forma de llegar al resultado.

6. Reparte 300 dólares entre A, B y C de forma que la parte de B sea el doble de la de A, y la de C sea el triple de la de A. Plantea la forma de llegar al resultado.

7. Un ganadero compró el doble de vacas que de bueyes. Por cada vaca pagó \$7,000 y por cada buey \$8,500. Si el importe total de la compra fue de \$270,000, ¿cuántas vacas y cuántos bueyes compró? Plantea la forma de llegar al resultado.

8. Durante su carrera en ligas mayores, Hank Aaron conectó 31 cuadrangulares más que Babe Ruth. Juntos batearon 1,459. ¿Cuántos conectó Babe Ruth? Plantea la forma de llegar al resultado.

Babe Ruth

9. El gerente de una gasolinera compró 60,000 litros de gasolina verde y roja por \$295,360. Suponiendo que el precio de mayoreo para los concesionarios es de \$4.89 por litro de gasolina verde y \$5.03 por litro de gasolina roja, ¿cuántos litros compró de cada una? Plantea la forma de llegar al resultado.

10. Un inversionista invierte \$20,000, una parte al 6% y el resto al 8%. Si su interés anual proveniente de estas dos inversiones suma \$1,500, ¿cuánto invirtió a cada tasa? Plantea la forma de llegar al resultado.

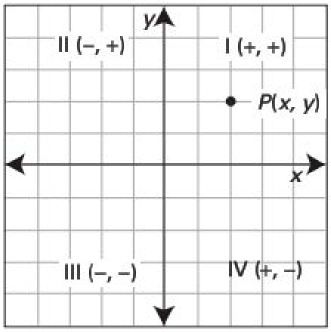
11. ¿Cuántos litros de solución de glicerina al 40% deben mezclarse con 10 litros de una solución de glicerina al 80% para obtener una solución al 65%? Observa la tabla adjunta.

Solución de gicerina	Litros	%	Litros de la concentración
A	x	0.40	$0.40x$
B	10	0.80	8
Mezcla	$x + 10$	0.65	$0.65(x + 10)$

12. Si el precio del cobre es de 0.65 de dólar la libra, y el precio del zinc es de 0.30 dólares, ¿cuántas libras de ambos deben mezclarse para obtener 70 libras de bronce, el cual se vende a 0.45 dólares por libra? *Sugerencia*: Completa la siguiente tabla para encontrar la respuesta.

Metal	Cantidad	Costo

Sistema coordenado en el plano



Antes de ocuparnos de la relación entre la función lineal y la ecuación lineal, es conveniente entender la utilidad de la correspondencia entre puntos geométricos y números reales, puesto que esta relación nos permite comprender el concepto de sistema de **coordenadas rectangulares o cartesianas**.

El sistema coordenado es un sistema rectangular, llamado así en honor a su descubridor, René Descartes (1596-1650). Se trata de un sistema formado por dos ejes que se cortan perpendicularmente y que generan cuatro regiones, donde a cada punto le corresponde precisamente un par de números reales.

A continuación se muestran los elementos que componen este sistema.

$P(x, y)$ es un punto geométrico, donde (x, y) representa un par de números reales.

x llama **abscisa** y y se llama **ordenada**; juntas, se llaman **coordenadas**.

Los cuadrantes se designan como I, II, III y IV y definen los signos de las coordenadas.

Autoevaluación

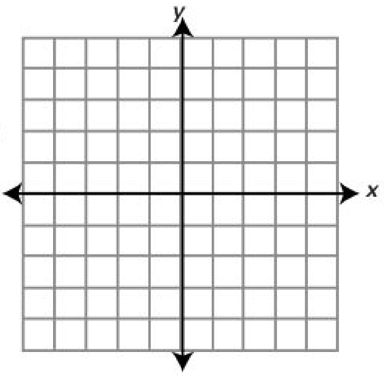
1. En la gráfica 1 localiza los puntos indicados a la izquierda, y en la gráfica 2 escribe las coordenadas de cada punto correspondiente a las coordenadas señaladas.

$P(4, 5)$

$Q(-4.5, 3.7)$

$R(-4, -4)$

$S(3, -\frac{4}{3})$



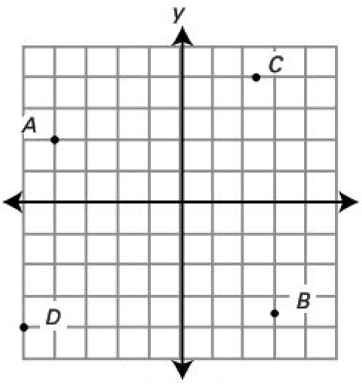
Gráfica 1

$A($ $\quad$ $)$

$B($ $\quad$ $)$

$C($ $\quad$ $)$

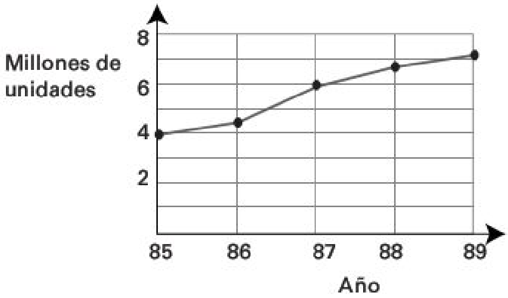
$D($ $\quad$ $)$



Gráfica 2

2. La siguiente gráfica indica las cifras de la venta de teléfonos personales en millones de unidades para los años 1985 a 1989. Fíjate que en el eje horizontal está determinado el año y en el vertical el número de unidades vendidas. Escribe los siguientes pares ordenados:

a) La cantidad de teléfonos vendidos en 1988.
b) El año en que las ventas fueron de 7.1 millones unidades.



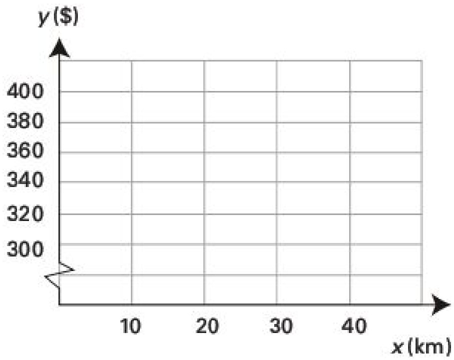
Ahora que conocemos el sistema de coordenadas en el plano, estamos en condiciones de relacionar la **ecuación lineal con su lugar geométrico**, es decir, con la **línea recta o función lineal**.

Supongamos que deseamos rentar un automóvil que cuesta $300 por día más $2 por kilómetro recorrido. Así, la ecuación para el costo y basado en el número x de kilómetros recorridos es la siguiente:

$$\underbrace{y}_{\text{Costo}} = \underbrace{2x}_{\text{Costo por km}} + \underbrace{300}_{\text{Renta fija}}$$

Esta ecuación nos permite calcular los pares ordenados de la forma (x, y) dependiendo del número de kilómetros recorridos. Grafica los valores de la tabla y observa el lugar geométrico resultante al unir los puntos.

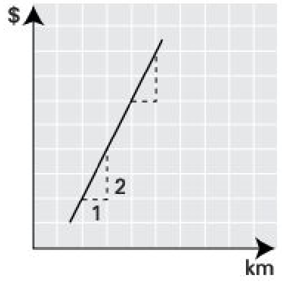
x (km)	0	10	20	30	40
y ($)	300	320	340	360	380



Relación entre funciones y ecuaciones lineales

Como te habrás dado cuenta, la gráfica es una **línea recta** y representa la ecuación **de primer grado** o **función lineal**. Su principal característica es que los puntos que la forman guardan entre sí una relación que no cambia. Esa relación se llama **pendiente**, se simboliza con la letra m y es el coeficiente del término en x cuando la y está despejada, como en este caso.

En cursos posteriores de geometría analítica estudiarás la relación constante llamada **pendiente**, pero por el momento es conveniente que te fijes que es una razón de cambio de las ordenadas entre las abscisas. Es decir, en nuestro ejemplo, el costo de \$2 por kilómetro recorrido representa ese valor y significa que cada vez que recorremos un valor en x a la derecha, subimos 2 en y.



$$m = \frac{2}{1} = 2$$

Función lineal

Es una línea recta cuya ecuación tiene la forma

$$y = mx + b$$

donde para cada valor de la variable independiente x, existe uno y sólo un valor para la variable dependiente y. La m es la pendiente de la recta y b es la intersección con el eje y.

Caso particular ($y = 0$)

En el caso particular en que $y = 0$, la función lineal $y = mx + b$ se convierte en la ecuación lineal $mx + b = 0$ que hemos estudiado en apartados anteriores. El valor de x obtenido en este caso particular representa la intersección de la recta con el eje x y se conoce como *solución* o *raíz* de la ecuación.

Ejemplos:

1. **Intersecciones con los ejes.** Grafica la función lineal

$$y = 2x + 4.$$

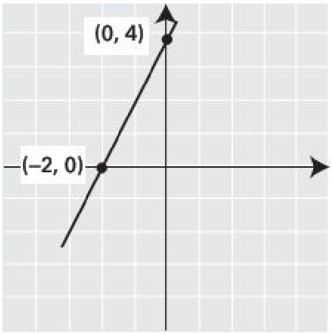
Solución:

Intersección con el eje x ($y = 0$):

Resolvemos $2x + 4 = 0$, por lo tanto, $x = \frac{-4}{2} = -2$, y el punto de intersección es $(-2, 0)$:

Intersección con el eje y:

Como $b = 4$ entonces el punto de intersección es $(0, 4)$.



Gráfica de la función lineal
$y = 2x + 4$

Raíz de la función lineal

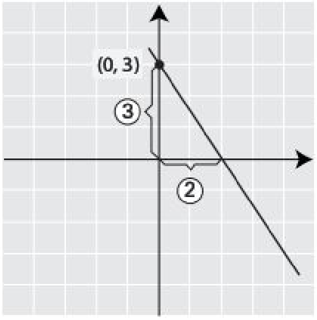
Por cierto, si te fijas, cuando $y = 0$, nuestra ecuación se convierte en $2x + 4 = 0$ y $x = -2$. Este valor se llama la **raíz** de la ecuación.

2. **Uso de la pendiente.** Grafica la función lineal $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

Solución:

Recuerda que el coeficiente de x es la pendiente m. En esta situación, $m = -\frac{3}{2}$ y, cuando la pendiente de una recta es negativa, significa que está inclinada más de 90 grados.

Como $b = 3$ la recta pasa por el punto $(0, 3)$; a partir de este punto avanzamos 3 unidades verticalmente y 2 horizontalmente.



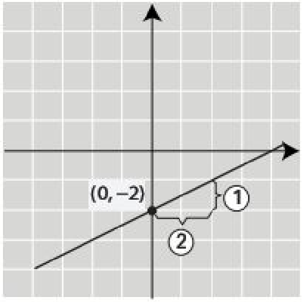
$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$

3. Ecuación lineal expresada como una función lineal. Expresa la ecuación $x-2y-4=0$ como una función lineal y bosqueja su gráfica.

Solución:

Aplicando las propiedades de las igualdades, $y=\frac{1}{2}x-2$.

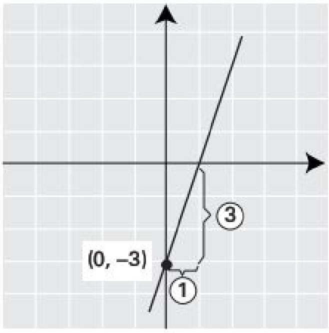
La función nos indica que $m=\frac{1}{2}$ y $b=-2$. Con estos datos ya podemos graficar.

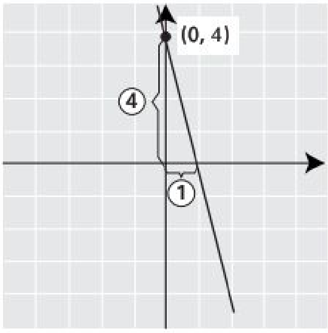


$$y=\frac{1}{2}x-2$$

Ejercicios

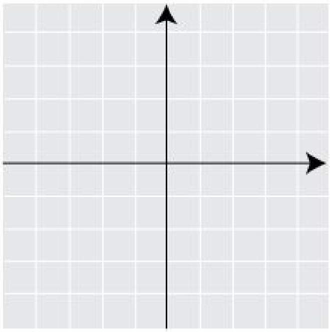
1. Escribe la expresión algebraica de la función correspondiente debajo de cada gráfica.





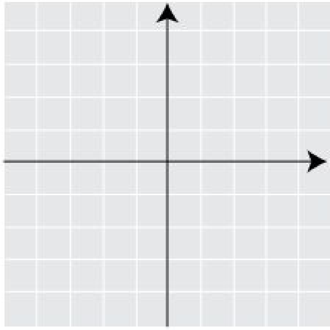
2. Grafica una por una las siguientes funciones atendiendo a las intersecciones con los ejes.

a) $y = 2x - 1$



x	0	
y		0

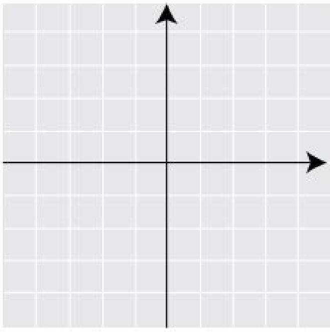
b) $y = -2x - 1$



x	0	
y		0

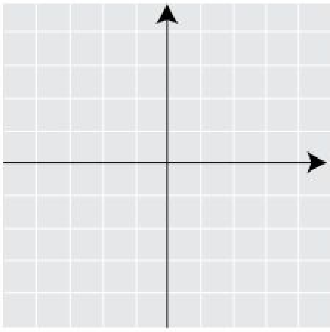
3. Grafica una por una las siguientes ecuaciones.

a) $2x - y + 4 = 0$



x	0	
y		0

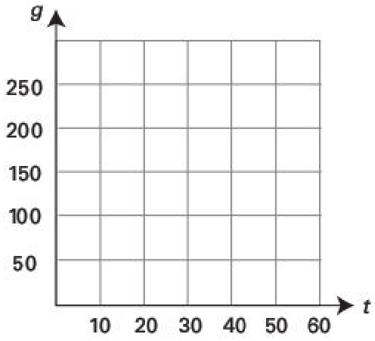
b) $3x - y = 3$



x	0	
y		0

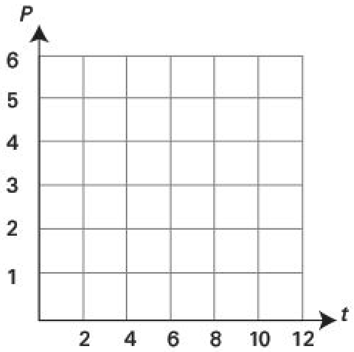
4. De acuerdo con el Departamento de Agricultura de Estados Unidos, el consumo total diario de grasa g (en gramos) por persona se puede aproximar mediante la ecuación $g = 140 + t$, donde t es la cantidad de años después de 1950 ($t = 0$).

a) ¿Cuál fue el consumo diario de grasa por persona en 1950?
b) ¿Cuál es el consumo diario de grasa que se calcula para el año 2000?
c) Traza la gráfica de $g = 140 + t$.



5. De acuerdo con la Asociación de la Industria de la Grabación, el porcentaje p en dólares de ventas por grabaciones de jazz se puede aproximar mediante la ecuación $p = 6 - 0.6t$, donde t son los años después de 1989.

a) Encuentra las intersecciones en t y en p para esta ecuación.
b) Grafica la ecuación.



AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 6

Considera tu desempeño como estudiante e indica la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

☹ **0** Nunca 😐 **5** Algunas veces ☺ **10** Siempre

CONOCIMIENTOS Después de estudiar el bloque, ¿adquiriste los conocimientos que te permiten	
• analizar y modelar situaciones empleando ecuaciones lineales?	
• identificar la relación entre funciones y ecuaciones lineales?	
• reconocer la función lineal $y = mx + b$ y el caso particular de $mx + b = 0$?	
• identificar los parámetros m y b para determinar el comportamiento gráfico de la función lineal?	
• reconocer diversas técnicas para graficar la función lineal?	

HABILIDADES Al finalizar el bloque, ¿desarrollaste las habilidades que te permiten	
• aplicar diversas técnicas para resolver ecuaciones lineales en una variable?	
• formular y resolver problemas mediante ecuaciones lineales?	
• aplicar diversas técnicas para graficar la función lineal?	
• transitar de ecuaciones a funciones lineales, y viceversa?	
• explicar cómo será la gráfica de la función lineal a partir de los parámetros m y b?	

CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 0.9. El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte respecto a las **actitudes** y los **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás al estudiar el tema.

BLOQUE

7 Ecuaciones lineales II

Unidades de competencia

En este bloque se pretende que el alumno desarrolle las siguientes competencias:

- Construir e interpretar modelos aritméticos, algebraicos y gráficos aplicando las propiedades de los números positivos y las expresiones aritméticas y algebraicas, relacionando magnitudes constantes y variables, y empleando literales para la representación y resolución de situaciones y/o problemas aritméticos y algebraicos concernientes a su vida cotidiana y escolar, los cuales le ayudarán a explicar y describir su realidad.
- Identificar las características presentes en tablas, gráficas, mapas, diagramas o textos, provenientes de situaciones cotidianas, y traducirlas a un lenguaje aritmético y/o algebraico.

Conocimientos

Al finalizar este bloque, el alumno habrá adquirido los conocimientos que le permitirán:

- Reconocer la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (2×2) mediante las gráficas de funciones lineales.
- Identificar gráficamente si un sistema de 2×2 posee una o infinitas soluciones, o ninguna.
- Reconocer la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (2×2) mediante métodos numéricos y analíticos, métodos de reducción

algebraica (suma y resta, sustitución e igualación) y método numérico por determinantes.
- Ubicar e interpretar situaciones diversas utilizando sistemas de 2×2.

Habilidades

Al finalizar este bloque, el alumno habrá desarrollado las habilidades que le permitirán:
- Resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, utilizando métodos numéricos, analíticos y gráficos.
- Expresar y solucionar situaciones diversas utilizando sistemas de 2×2.
- Resolver sistemas de ecuaciones de 2×2 empleando métodos de reducción algebraica y numérica.
- Formular argumentos referentes a la solución y aplicación de sistemas de ecuaciones.

Actitudes y valores

Al finalizar este bloque, el alumno:
- Apreciará la diversidad y efectividad de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones de 2×2.
- Valorará la aplicabilidad de los sistemas de 2×2 en la modelación y resolución de diversas situaciones.
- Asumirá una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y las habilidades con los que cuenta, al realizar actividades asignadas.

Indicadores de desempeño

Se pretende que el alumno logre:
- Identificar situaciones en las que las magnitudes constantes o variables se relacionan mediante sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Representar en los ejes vertical y horizontal, respectivamente, las variables dependiente e independiente de las funciones lineales asociadas a los sistemas de ecuaciones de 2×2, y calcular una a partir de la otra para tabular valores y graficar.

(Continúa)

(Continuación)

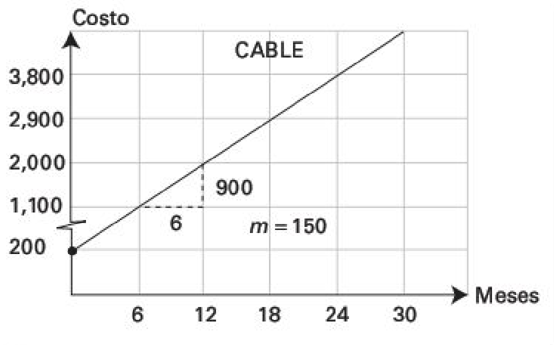
- Resolver problemas de ecuaciones lineales utilizando métodos de reducción, determinantes o gráficas de funciones asociadas de sistemas de ecuaciones lineales de 2×2.
- Identificar las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales de 2×2, comprobarlas empleando modelos algebraicos o gráficos, y explicar por qué algunos resultados son inadmisibles en el contexto del problema.
- Extraer información de registros algebraicos, o bien, de gráficas, tablas y mapas, y utilizar la escala o equivalencia de unidades para realizar conversiones a medidas reales o viceversa.

Propuesta de aprendizaje

Tienes dos alternativas para contratar un servicio de televisión. Una opción A de cable cuyo costo de instalación es de \$200 más \$150 mensuales de renta, y otra opción B con receptor de antena cuyo costo de instalación es de \$1,400 más \$100 por renta mensual. ¿En cuántos meses los costos serán iguales?

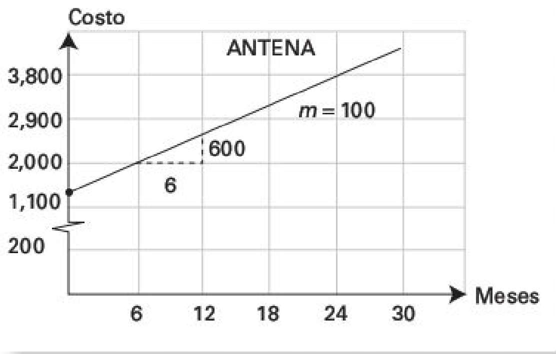
Secuencia didáctica

- Vamos a llamar y al costo total de la instalación del servicio de cable más el gasto de \$150 mensuales por x meses. Escribe una ecuación para y en función de x. Observa la gráfica.
- Completa la siguiente tabla donde y es el costo del servicio de cable por x meses.



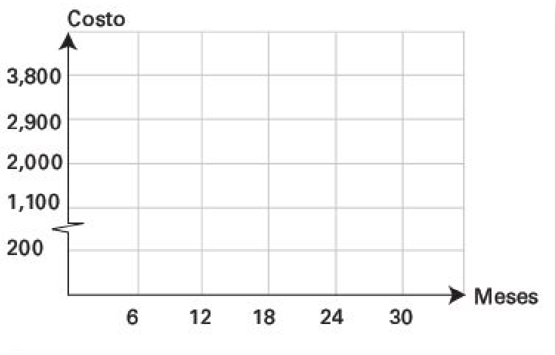
x	y
0	
6	
12	
18	

- Vamos a llamar y al costo total de la instalación del servicio con receptor de antena más el gasto de \$100 mensuales por x meses. Escribe una ecuación para y en función de x. Observa la gráfica.
- Completa la siguiente tabla donde y es el costo del servicio de antena por x meses.



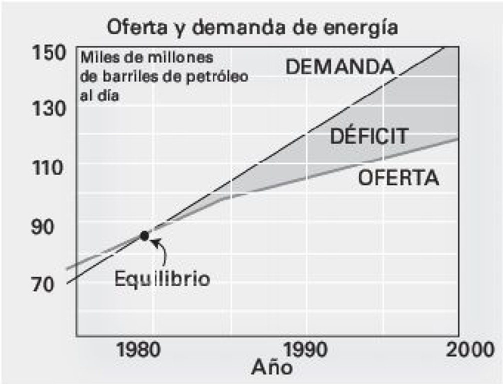
x	y
0	
6	
12	
18	

- Grafica la información de las dos opciones sobre los mismos ejes coordenados.
- Con referencia a la gráfica conjunta: ¿cuándo es más barato el servicio de cable?, ¿cuándo es más barato el servicio con receptor de antena?



Solución gráfica de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas

Si observamos en la siguiente gráfica, es muy evidente que hay un punto donde las líneas de la oferta y la demanda coinciden; este punto se llama de **intersección** y es la solución simultánea de las dos ecuaciones que representan a las líneas. En esta sección vamos a aprender el **método gráfico** para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, si es que existe la solución.



La solución simultánea de dos ecuaciones con dos variables es un par ordenado de números reales (x, y) que representan un *punto común* al lugar geométrico de las dos líneas rectas. Por lo tanto, en el **método gráfico** nos basaremos en la gráfica de las dos ecuaciones lineales para determinar su solución.

Ejemplos:

1. Encuentra de manera gráfica la solución de

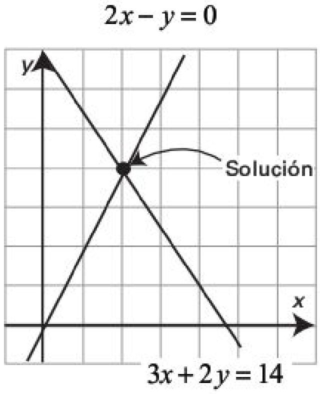
$$2x - y = 0$$

$$3x + 2y = 14$$

Solución:

Primero que nada, hay que graficar cada ecuación como lo hicimos en la sección anterior. Para ello, construyamos una tabla como la siguiente:

x	$y = 2x$	x	$y = -\frac{3}{2}x + 7$
0	0	0	7
1	2	2	4



En la gráfica podemos apreciar claramente que el par ordenado que satisface al sistema de ecuaciones es (2, 4). Veamos la *comprobación.*

$$2(2) - 4 = 0$$

$$3(2) + 2(4) = 14$$

2. Encuentra de manera gráfica la solución de

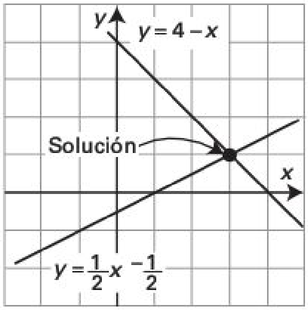
$$x + y = 4$$

$$2y - x = -1$$

Solución:

Al igual que en el ejemplo anterior, construyamos una tabla para graficar las ecuaciones dadas.

x	$y=4-x$	x	$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
0	4	1	0
4	0	−1	−1



Como se observa en la gráfica de estas dos líneas, la solución es (3, 1). ¡Compruébalo!

Aplicación

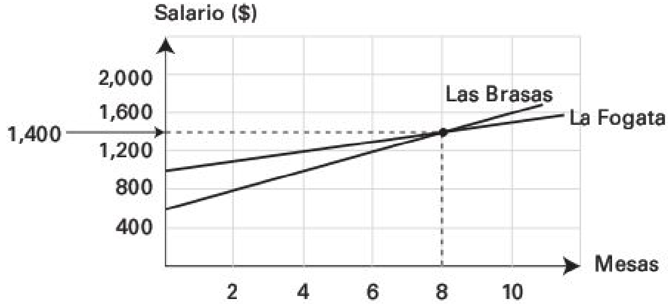
El restaurante Las Brasas paga a sus camareros $500 a la semana más las propinas, que promedian $100 por mesa. La Fogata paga $1,000 a la semana, pero las propinas promedian sólo $50 por mesa. ¿Cuántas mesas x tendría que atender un mesero para que su salario semanal y fuera el mismo en ambos restaurantes?

Solución:

Con la siguiente tabla resumimos la situación.

Restaurante	Las Brasas	La Fogata
Salario	$y=500+100x$	$y=1,000+50x$

En la gráfica de ambas funciones se aprecia que los valores son (8, 1,400), es decir, con 8 meses el salario será igual a $1,400.



Evidencias de aprendizaje

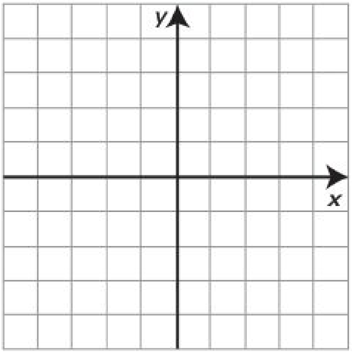
Resuelve cada sistema por graficación.

1. $x + y = 4$

   $x - y = -2$

x	$y =$

x	$y =$

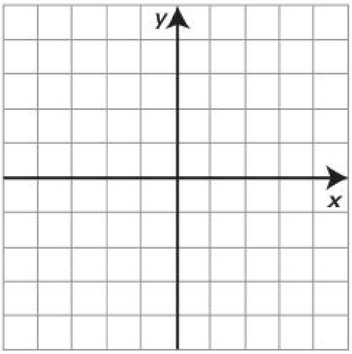


2. $3x - 2y = 6$

   $x + y = -3$

x	$y =$

x	$y =$

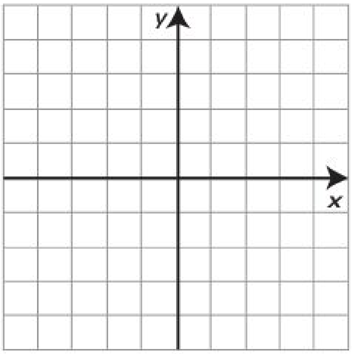


3. $x - 2y = 2$

$y = -2$

x	$y =$

x	$y =$

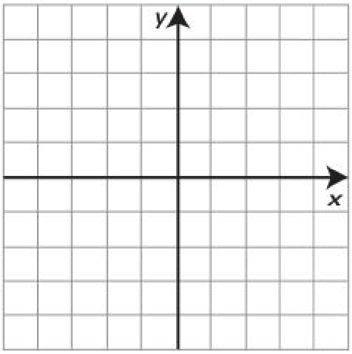


4. $y = 3x + 6$

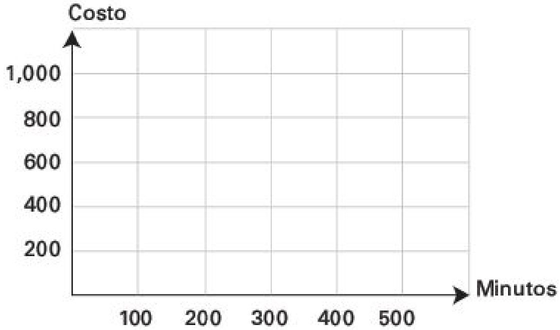
$y = -2x - 4$

x	$y =$

x	$y =$



5. La compañía telefónica A tiene un plan que cuesta \$200 al mes más \$1 por cada minuto x de tiempo aire, mientras que la compañía B hace un cargo de \$500 mensuales más \$0.40 por cada minuto x de tiempo aire. Determina gráficamente en qué momento el costo y es igual en ambas compañías.



Gráfica de una o infinitas soluciones, o ninguna

Ejemplos:

1. Encuentra de manera gráfica la solución de

$$x+2y=4$$

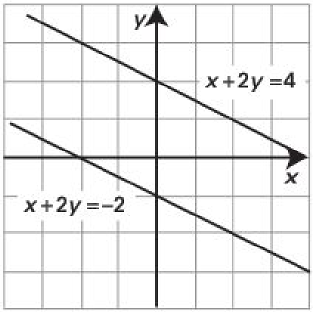
$$x+2y=-2$$

Solución:

Construyamos una tabla para graficar las ecuaciones dadas.

x	$y=-\frac{1}{2}x-1$
0	–1
–2	0

x	$y=-\frac{1}{2}x+2$
0	2
2	1



Como se aprecia en la gráfica, las rectas son paralelas y no se intersecan; por lo tanto, el sistema **no tiene solución**. Cuando ocurre esto, el sistema suele llamarse **inconsistente** y las pendientes de la rectas son iguales.

2. Encuentra de manera gráfica la solución de

$$4x+2y=8$$

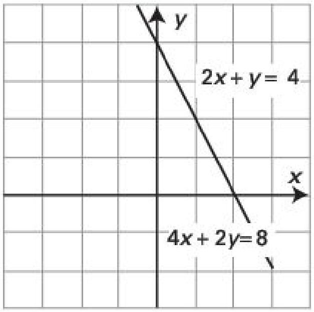
$$2x+y=4$$

Solución:

Construyamos una tabla para graficar las ecuaciones dadas.

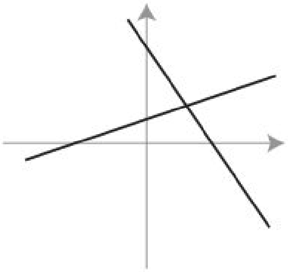
x	$y=-2x+4$
0	4
2	0

x	$y=4-2x$
0	4
2	0

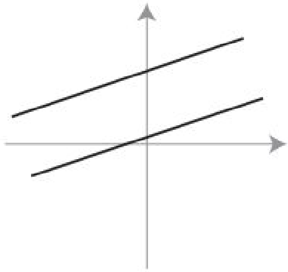


Cuando revisamos los puntos de cada ecuación, lo que vemos es que son los mismos para ambas. ¿Qué significa esto? Significa que las gráficas de cada ecuación lineal **coinciden**, es decir, son las mismas. De esta forma, la solución para una es la misma que para la otra; de hecho, hay un número infinito de soluciones. Se dice que un sistema de esta clase es **dependiente**.

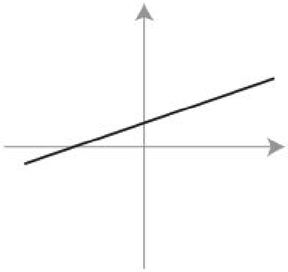
Como hemos visto hasta aquí, un sistema de ecuaciones puede tener exactamente una solución (cuando las líneas se cruzan). En tal caso, el sistema se llama **consistente**; cuando no tienen solución (las líneas son paralelas), el sistema es **inconsistente**; o bien, cuando existe un número infinito de soluciones (las líneas se superponen), el sistema es **dependiente**. Las siguientes figuras ilustran los tres casos.



Sistema consistente e independiente (una sola solución).



Sistema inconsistente; líneas paralelas (ninguna solución).



Sistema dependiente; las líneas coinciden (número infinito de soluciones).

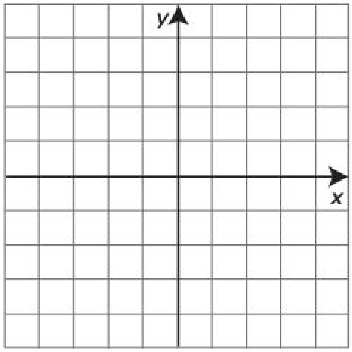
Evidencias de aprendizaje

Resuelve cada sistema por graficación. Determina si las rectas son paralelas, si se cortan en un punto o si tienen un número infinito de soluciones.

1. $x + y = 3$

$2x - y = 0$

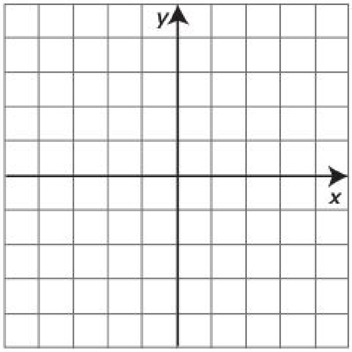
x	$y =$	x	$y =$



2. $3x + 12y = 2$

$x + 4y = 8$

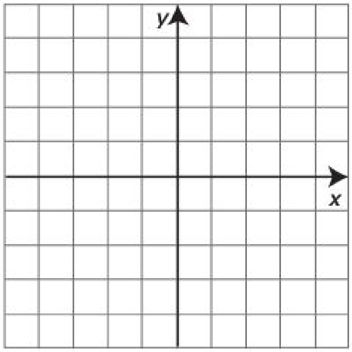
x	$y =$	x	$y =$



3. $2x + 4y = 8$

$x + 2y = 4$

x	$y =$	x	$y =$



Autoevaluación

Califica como falsa o verdadera cada afirmación marcando la casilla correspondiente con ✓.

Un sistema de ecuaciones de 2×2:	Falso	Verdadero
1. No tiene solución si las rectas son paralelas.		
2. No tiene solución si las rectas se cruzan en un punto.		
3. Tiene infinidad de soluciones si las rectas quedan sobrepuestas.		

Técnicas analíticas para la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

Métodos de sustitución e igualación

Los métodos de sustitución e igualación para resolver ecuaciones simultáneamente son procesos analíticos más eficientes y más precisos que el gráfico. En estos métodos, en una de las ecuaciones se despeja una variable en función de la otra. A continuación, la variable despejada se sustituye o se iguala (según sea el método utilizado) en la otra ecuación para que quede una sola variable y se pueda resolver.

Ejemplos:

1. Resuelve por **sustitución** el sistema

$$2x + y = 1$$

$$3x + 4y = 14$$

Solución:

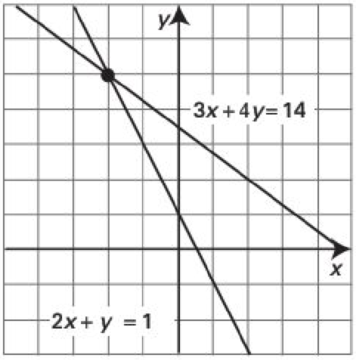
Observa la siguiente secuencia para resolver el sistema por sustitución.

Se selecciona una ecuación.	Se despeja una variable.	Se sustituye *y* en la otra ecuación y se resuelve.	Se sustituye el valor obtenido en la otra ecuación.
$2x + y = 1$	$y = 1 - 2x$	$3x + 4\left(\underbrace{1-2x}_{y}\right) = 14$ $3x + 4 - 8x = 14$ $3x - 8x = 14 - 4$ $-5x = 10$ $x = -\frac{10}{5}$ $x = -2$	$y = 1 - 2x$ $y = 1 - 2(-2)$ $y = 5$

(Continúa)

(Continuación)

La solución de la ecuación es el par ordenado (–2, 5). La figura indica que las gráficas de las ecuaciones son las rectas que se intersecan en dicho punto.



2. Resuelve por **igualación** el sistema

$$x + y = 8$$

$$2x - 3y = -9$$

Solución:

Despejamos y de la primera ecuación.

$$y = 8 - x$$

Hacemos lo mismo con la otra ecuación.

$$y = \frac{3}{2}x + 3$$

Igualamos las expresiones anteriores y resolvemos la igualdad.

$$8 - x = \frac{2}{3}x + 3$$

$24 - 3x = 2x + 9$ Multiplicamos todo por 3.

$-3x - 2x = 9 - 24$ Trasponemos términos.

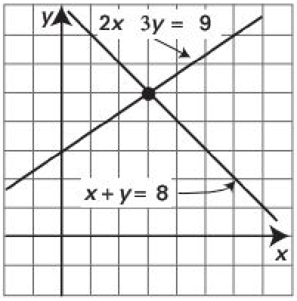
$-5x = -15$ Reducimos la igualdad.

$x = \frac{15}{5} = 3$ Multiplicamos todo por $-\frac{1}{5}$.

A continuación, sustituimos $x = 3$ en $y = 8 - x$ y calculamos el valor de y

$$y = 8 - 3 = 5$$

La solución es el par ordenado (3, 5) y la figura muestra las gráficas de las dos ecuaciones.



Aplicación

Una persona invirtió \$25,000 en dos cuentas bancarias; una de éstas paga el 5% y la otra el 6% de interés simple. Si la persona recibió \$1,440 de intereses en un año, ¿qué cantidad invirtió en cada cuenta?

Solución:

Resumimos la información de la siguiente manera.

Dinero invertido	Cantidad invertida al 5%	Cantidad invertida al 6%	Ecuaciones
\$25,000	x	y	$x + y = 25{,}000$ $0.05x + 0.06y = 1{,}440$

$y = 25{,}000 - x$	Despejamos y de la primera ecuación.
$0.05x + 0.06(25{,}000 - x) = 1{,}440$	Sustituimos y en la segunda ecuación.
$0.05x + 1{,}500 - 0.06x = 1{,}440$	Simplificamos.
$-0.01x = -60$	Simplificamos.
$x = \dfrac{60}{0.01} = 6{,}000$	Despejamos x.
$y = 25{,}000 - 6{,}000 = 19{,}000$	Despejamos y.

Se invirtieron \$6,000 al 5% y \$19,000 al 6%.

Evidencias de aprendizaje

Resuelve cada sistema por el método de **sustitución**. Determina si las rectas son paralelas, si se cortan en un punto o si tienen un número infinito de soluciones.

1. $y = 2x - 4$

$-2x = y - 4$

Selecciona una ecuación.	Despeja una variable.
Sustitúyela en la otra ecuación y resuelve.	**Sustituye el valor obtenido en la otra ecuación y obtén el valor de la otra variable.**

2. $x + y = 5$

$x = y + 1$

Selecciona una ecuación.	Despeja una variable.
Sustitúyela en la otra ecuación y resuelve.	**Sustituye el valor obtenido en la otra ecuación.**

3. $y - 4 = 2x$

$2x = y - 2$

Selecciona una ecuación.	Despeja una variable.
Sustitúyela en la otra ecuación y resuelve.	**Sustituye el valor obtenido en la otra ecuación.**

Resuelve cada sistema por el método de **igualación**. Determina si las rectas son paralelas, si se cortan en un punto o si tienen un número infinito de soluciones.

1. $x = 2y + 1$

$y = 2x + 1$

Despeja la misma variable en las dos ecuaciones.	Iguala las ecuaciones del paso anterior.
Resuelve la igualdad anterior.	**Sustituye el valor obtenido en la ecuación anterior.**

2. $x+2y=4$
$x=-2y+4$

Despeja la misma variable en las dos ecuaciones.	Iguala las ecuaciones del paso anterior.
Resuelve la igualdad anterior.	**Sustituye el valor obtenido en la ecuación anterior.**

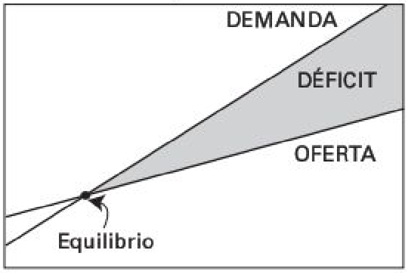
Aplicaciones

Resuelve cada una de las siguientes situaciones.

1. Una compañía telefónica hace un cargo de \$350 por la instalación inicial más \$200 al mes. Otra cobra \$200 por la instalación inicial más \$350 al mes. ¿Al final de qué mes el costo será el mismo en las dos compañías?

2. La fórmula para la conversión de grados centígrados (°C) en Fahrenheit (°F) es $F=\frac{9}{5}C+32$. ¿Cuándo será la temperatura en grados Fahrenheit la misma que en grados centígrados?

3. La oferta y de cierto producto está dada por la ecuación $y = 3x + 8$, donde x es el número de días transcurridos. Si la demanda está dada por $y = 4x$, ¿en cuántos días la oferta igualará a la demanda?



Métodos de eliminación (suma y resta) para resolver ecuaciones simultáneamente

Hasta aquí, hemos resuelto sistemas de ecuaciones con dos variables por los métodos gráfico, de sustitución e igualación. Cuando no es deseable o factible utilizar alguno de estos métodos, hay otra opción: el **método de eliminación**, también conocido como **método de suma o resta**.

Este método resulta conveniente cuando el sistema de ecuaciones tiene una variable con el mismo coeficiente, ya sea que tenga el mismo signo o signo contrario, lo que nos permite sumar ambas ecuaciones y eliminar una de las variables. Aquí te presentamos cómo hacerlo.

Ejemplos:

1. Resuelve el sistema

$$2x + y = 1$$
$$3x - 2y = -9$$

Solución:

La idea es multiplicar una o ambas ecuaciones por la misma cantidad para así eliminar una de las variables y obtener una ecuación con una sola incógnita.

Observa la siguiente secuencia para resolver el sistema por sustitución.

Sistema de ecuaciones dado.	Multiplicamos la primera ecuación por 2 y sumamos ambas ecuaciones para eliminar la y.	Escribimos -1 en vez de x en $2x + y = 1$.
$2x + y = 1$ $3x - 2y = -9$	$4x + 2y = 2$ $\underline{3x - 2y = -9}$ $7x + 0y = -7$ Despejamos x. $x = -\frac{7}{7} = -1$	$2(-1) + y = 1$ $y = 1 + 2$ $y = 3$

La solución del sistema es el par de coordenadas $(-1, 3)$.

(Continúa)

2. Veamos ahora un sistema *inconsistente*. Resuelve el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 3 \\ 4x + 6y &= -6 \end{aligned}$$

Solución:

En este caso, nos conviene eliminar la x multiplicando la primera ecuación por -2

$2x+3y=3$	Multiplicamos por -2.	$-4x-6y=-6$
$4x+6y=-6$	Se queda como está.	$4x+6y=-6$
		$0+0=-12$

Como vemos, no hay solución, puesto que esto es un absurdo; el sistema es *inconsistente*.

3. Hay casos en que es necesario multiplicar ambas ecuaciones por diferentes números para que los coeficientes de alguna de las variables cambien de signo y sean del mismo valor absoluto. Resolvamos el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 3 \\ 5x + 2y &= 13 \end{aligned}$$

Solución:

Multipliquemos ambas ecuaciones por números que nos den coeficientes de forma que una de las variables se pueda eliminar, por ejemplo, la x.

$2x+3y=3$	Multiplicamos por 5.	$10x+15y=15$
$5x+2y=13$	Multiplicamos por -2.	$-10x-4y=-26$
		$11y=-11$ Sumamos.
		$y=-1$

Sustituimos -1 en vez de y en la ecuación $2x + 3y = 3$.

$$2x+3(-1)=3$$

$$2x-3=3 \qquad \text{Simplificamos.}$$

$$2x=6$$

$$x=3$$

De esta manera, la solución del sistema es (3, −1).

Como es evidente, una segunda opción para obtener la solución sería eliminar la *y*.

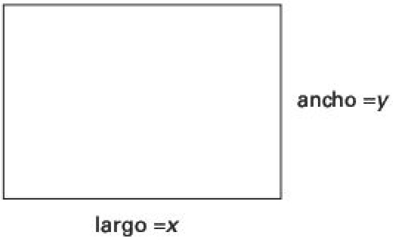
Aplicación

El ancho de un terreno rectangular es el 70% de su largo. ¿Qué dimensiones tiene el terreno, si su dueño ocupó 280 metros de malla ciclónica para cercarlo?

Solución:

Si bosquejamos el terreno como la figura adjunta, entonces el perímetro del terreno es:

$$2x+2y=280$$



y la relación entre x y y es:

$$y=0.7x$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones:

$$2x+2y=280$$

$$\underline{1.4x-2y=0}$$ Multiplicamos por 2 e igualamos a cero la segunda ecuación.

$$3.4x+0y=280$$ Eliminamos y.

$x=\dfrac{280}{3.4}=82.35$ metros, por lo tanto, $y=0.7(82.35)\approx 57.65$ metros

El terreno mide 82.35 metros de largo por 57.65 metros de ancho.

Evidencias de aprendizaje

Resuelve con el método de eliminación los siguientes sistemas de ecuaciones y establece si tienen una solución o si son inconsistentes o dependientes.

1. $x+y=3$

   $x-y=-1$

Escribe el sistema de ecuaciones dado.	Elimina una de las variables y resuelve el valor de la otra.	Despeja la variable que eliminaste.

2. $2x+y=4$

   $4x+2y=0$

Escribe el sistema de ecuaciones dado.	Elimina una de las variables y resuelve el valor de la otra.	Despeja la variable que eliminaste.

3. $x-5y=15$
$x+5y=5$

Escribe el sistema de ecuaciones dado.	Elimina una de las variables y resuelve el valor de la otra.	Despeja la variable que eliminaste.

4. $3x-4y=10$
$5x+2y=34$

Escribe el sistema de ecuaciones dado.	Elimina una de las variables y resuelve el valor de la otra.	Despeja la variable que eliminaste.

5. Escribe en el paréntesis correspondiente la letra que contenga la solución correcta de cada sistema.

( ) $\begin{array}{r} x-2y=9 \\ -2x-3y=10 \end{array}$	( ) $\begin{array}{r} x+y=5 \\ x-y=1 \end{array}$	( ) $\begin{array}{r} x+2y=4 \\ x-2y=8 \end{array}$	( ) $\begin{array}{r} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{array}$
a) $(3,2)$	*b*) $(6,-1)$	*c*) $(1,-4)$	*d*) $(1,2)$

Autoevaluación

1. **Mezclas.** Si el precio del cobre es de \$0.65 la libra y el precio del zinc es de \$0.35 la libra, ¿cuántas libras de cobre y zinc deberán mezclarse para fabricar 70 libras de bronce, el cual se vende a \$0.45 por libra?

2. **Inversiones.** Una persona fue al banco a depositar \$3,000. El dinero estaba en billetes de \$100 y de \$200, y tiene 25 billetes en total. ¿Cuántos billetes de cada denominación tenía esa persona?

3. **Números.** La suma entre dos números es 16. Uno de los números excede al otro en 4. ¿Cuáles son esos números?

4. **Inversiones.** María invirtió \$25,000: una parte al 7.5% y el restante al 6%. Si el interés anual de las dos inversiones es de \$1,620, ¿cuánto dinero invirtió a cada tasa?

Solución de un sistema de ecuaciones de 2×2 utilizando determinantes

Se llama **determinante** A al número que resulta del arreglo de escribir igual número de renglones que de columnas. Los determinantes nos sirven también para resolver ecuaciones con dichos arreglos.

Para representar un determinante se usa el símbolo $|A|$ El arreglo más sencillo de determinante es el que consta de un renglón por una columna, es decir, aquel que contiene un solo elemento: $|A| = a$. Si el determinante $|A|$ tiene 2 por 2 elementos, el arreglo se define como:

$$|A| = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Ejemplo:

Evalúa el determinante $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Solución:

$$|A| = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 3(5) - 4(2) = 15 - 8 = 7$$

Los determinantes se utilizan para resolver ecuaciones lineales con un método que se llama *regla de Cramer*.

(Continúa)

(Continuación)

Pensemos que queremos resolver el sistema de ecuaciones

$$ax + by = r$$

$$cx + dy = s$$

Utilizando el método de eliminación de una variable, por ejemplo, la y, multiplicamos la primera ecuación por d y la segunda por b y las restamos.

$$d\left(ax\right) + d\left(by\right) = rd$$

$$\underline{-b\left(cx\right) - b\left(dy\right) = -sb}$$

$$adx - bcx = rd - sb$$

Factorizamos y despejamos x; el resultado es

$$x = \frac{rd - sb}{ad - bc}$$

A partir de la definición de determinante, la solución para x puede escribirse de la siguiente forma:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} r & b \\ s & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{rd - bs}{ad - bc}$$

de una forma análoga, la solución para y es:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & r \\ c & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{as - rc}{ad - bc}$$

Observa que, en ambas soluciones, el denominador es el determinante del arreglo de los coeficientes de las ecuaciones; lo llamaremos D. El numerador de la solución para x es el determinante del arreglo que se obtiene del mismo determinante, pero sustituyendo la primera columna por los términos independientes r y s. De igual manera ocurre con y: el numerador es el determinante del arreglo D al remplazar la segunda columna, la de los coeficientes de y, por r y s. Resumimos lo anterior con los siguientes determinantes.

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} r & b \\ s & d \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a & r \\ c & s \end{vmatrix}$$

La solución del sistema se expresa en la forma:

$x = \dfrac{D_x}{D}$ $\qquad$ $y = \dfrac{D_y}{D}$ $\qquad$ $D \neq 0$

Si D fuera cero, esto indicaría que la ecuación no tiene solución.

Ejemplo. Utiliza determinantes para resolver el sistema

$$2x + y = 3$$

$$3x + 2y = 1$$

Solución:

Primero calculamos cada determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 1(3) = 4 - 3 = 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(2) - 1(1) = 6 - 1 = 5$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2(1) - 3(3) = 2 - 9 = -7$$

La solución es $\quad x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{5}{1} = 5$, $\quad y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-7}{1} = -7$

Ejercicios

1. Calcula el determinante de los siguientes arreglos.

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} =$	*b*) $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} =$	*c*) $\begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} =$

2. Utiliza el método de determinantes para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $x-2y=9$ $-2x-3y=10$	$D=$
Solución: $x=$ $y=$	$D_x=$ $D_y=$

b) $x+y=5$ $x-y=1$	$D=$
Solución: $x=$ $y=$	$D_x=$ $D_y=$

c) $x+2y=4$ $x-2y=8$	$D=$
Solución: $x=$ $y=$	$D_x=$ $D_y=$

Aplicación y análisis

Movimiento. Un barco recorre 77 kilómetros con la corriente a su favor en 1 hora; de regreso (con la corriente en contra), tarda 4 horas para recorrer la misma distancia. ¿Cuál es la velocidad del flujo de la corriente?

Sugerencia: Para resolver la situación observa la siguiente tabla y recuerda que velocidad por tiempo es igual al desplazamiento.

Velocidades	Desplazamiento = velocidad × tiempo
x = velocidad del barco y = velocidad de la corriente	$(x+y)(1)=77$ con la corriente a favor $(x-y)(4)=77$ con la corriente en contra

AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 7

Considera tu desempeño como estudiante e indica la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

☹ **0** Nunca ☹ **5** Algunas veces ☺ **10** Siempre

CONOCIMIENTOS Después de estudiar el bloque, ¿adquiriste los conocimientos que te permiten	
• reconocer la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (2×2) mediante las gráficas de funciones lineales?	
• identificar gráficamente si un sistema de 2×2 posee una o infinitas soluciones o ninguna?	
• reconocer la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (2×2) mediante diversos métodos?	
• ubicar e interpretar situaciones diversas utilizando sistemas de 2×2?	

HABILIDADES Al finalizar el bloque, ¿desarrollaste las habilidades que te permiten	
• resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas utilizando métodos numéricos, analíticos y gráficos?	
• expresar y solucionar situaciones diversas utilizando sistemas de 2×2?	
• resolver sistemas de ecuaciones de 2×2 empleando métodos de reducción algebraica y numérica?	
• formular argumentos referentes a la resolución y aplicación de sistemas de ecuaciones?	

CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 1.25. El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte respecto a las **actitudes** y los **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás al estudiar el tema.

BLOQUE

8 Ecuaciones lineales III

Unidades de competencia

En este bloque se pretende que el alumno desarrolle las siguientes competencias:

- Construir e interpretar modelos aritméticos, algebraicos y gráficos aplicando las propiedades de los números positivos y las expresiones aritméticas y algebraicas, relacionando magnitudes constantes y variables, y empleando literales para la representación y resolución de situaciones y/o problemas aritméticos y algebraicos concernientes a su vida cotidiana y escolar, los cuales le ayudarán a explicar y describir su realidad.
- Identificar las características presentes en tablas, gráficas, mapas, diagramas o textos, provenientes de situaciones cotidianas, y traducirlas a un lenguaje aritmético y/o algebraico.

Conocimientos

Al finalizar este bloque, el alumno habrá adquirido los conocimientos que le permitirán:

- Comprender los métodos para resolver sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas:
- Método numérico por determinantes
- Método algebraico de sustitución
- Ubicar e interpretar situaciones diversas utilizando sistemas de 3×3.

Habilidades

Al finalizar este bloque, el alumno habrá desarrollado las habilidades que le permitirán:

- Obtener la solución de sistemas de ecuaciones de 3×3.
- Aplicar el método numérico por determinantes para resolver sistemas de 3×3.
- Utilizar el método de sustitución para resolver un sistema de 3×3.
- Representar y solucionar situaciones diversas utilizando sistemas 3×3.
- Expresar ideas y conceptos de sistemas de ecuaciones con tres incógnitas empleando representaciones en lenguaje común, simbólico o gráfico.
- Ejecutar instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye a resolver una ecuación de 3×3.

Actitudes y valores

Al finalizar este bloque, el alumno:

- Apreciará la simplicidad de los métodos numéricos para resolver sistemas de 3×3.
- Valorará la utilidad de los sistemas de 3×3 para representar y solucionar diversas situaciones.
- Asumirá una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y las habilidades con los que cuenta, en las actividades que le son asignadas.
- Asumirá una actitud propositiva que favorece la resolución de problemas en distintos ámbitos.
- Promoverá el diálogo como un valioso mecanismo para la resolución de conflictos.

Indicadores de desempeño

Se pretende que el alumno logre:

- Identificar situaciones en las que las magnitudes constantes o variables se relacionan mediante sistemas de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas.
- Representar en los ejes vertical y horizontal, respectivamente, las variables dependiente e independiente de las funciones lineales asociadas a los

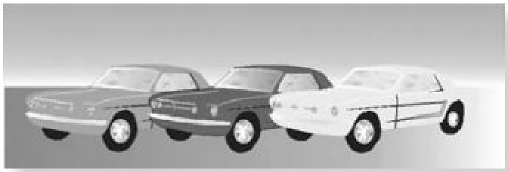
(Continúa)

(Continuación)

sistemas de ecuaciones de 3×3, y calcular una a partir de la otra para tabular valores y graficar.

- Resolver problemas de ecuaciones lineales de 3×3 planteados en lenguaje algebraico utilizando métodos de sustitución, determinantes o gráficas.
- Identificar las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales de 3×3 y comprobarlas empleando modelos algebraicos o visualizarlas en modelos gráficos, y explicar por qué algunos resultados son inadmisibles en el contexto del problema.
- Extraer información de registros algebraicos o gráficos y utilizar la escala de equivalencia de unidades para realizar conversiones a medidas reales y viceversa.

Propuesta de aprendizaje



Un vendedor de autos ofrece un vehículo en tres versiones: normal, equipado y con vestiduras en piel. Por cada automóvil que vende, recibe una comisión en función de la versión vendida.

La siguiente tabla indica las ventas que realizó de cada tipo de automóvil durante tres semanas.

	Normal	Equipado	Piel
Semana 1	1	1	2
Semana 2	2	1	0
Semana 3	1	2	1

La primera semana recibió \$2,750 de comisiones, la segunda semana obtuvo \$2,000, y la tercera recibió \$2,250.

a) Sean x, y y z las comisiones que ganó por cada versión de las ventas de automóviles: normal equipado o con vestiduras en piel, respectivamente. Escribe un sistema de ecuaciones que represente las operaciones comerciales realizadas por el vendedor en las tres semanas.

b) ¿Cuánto recibió de comisión por semana a partir de cada versión vendida?

Secuencia didáctica

- Para encontrar la solución de la actividad anterior, realiza los siguientes pasos:
  1. Consulta con tu profesor si modelaste correctamente el sistema de ecuaciones.
  2. Despeja una de las variables de la primera ecuación.
  3. Sustituye dicha variable en las otras dos ecuaciones y simplifica.
  4. Ahora ya puedes resolver el sistema de 2×2 que obtuviste.

Resolución de un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas por sustitución

Para resolver un sistema lineal de 3×3 por **sustitución** observa la siguiente secuencia:

Sistema de ecuaciones	→	Despeja una variable. Sustitúyela en las otras ecuaciones.	→	Resuelve el sistema 2×2 resultante.

Ejemplo:

Resuelve por el método de sustitución el siguiente sistema de ecuaciones.

$$x + y + 2z = 2{,}750$$

$$2x + y + 0 = 2{,}000$$

$$x + 2y + z = 2{,}250$$

Solución:

Paso 1. Despejamos una variable en cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo, x en la primera ecuación:

$$x = 2{,}750 - y - 2z$$

(Continúa)

(Continuación)

Paso 2. Sustituimos el valor de x en las otras dos ecuaciones:

$$2x+y+0=2{,}000 \qquad x+2y+z=2{,}250$$

$$2(2{,}750-y-2z)+y+0=2{,}000 \qquad (2{,}750-y-2z)+2y+z=2{,}250$$

$$5{,}500-y-4z=2{,}000 \qquad -y-2z+2y+z=2{,}250-2{,}750$$

$$-y-4z=2{,}000-5{,}500 \qquad y-z=-500$$

$$-y-4z=-3{,}500$$

Paso 3. Resolvemos el sistema 2×2 resultante:

$$-y-4z=-3{,}500$$

$$y-z=-500$$

Por suma y resta:

$$-y-4z=-3{,}500$$

$$\underline{y-z\ =\ -500}$$

$$-5z=-4{,}000 \text{ entonces, } z=\frac{-4{,}000}{-5}=800$$

Paso 4. Sustituimos el valor de z y obtenemos el valor de x y y.

$$y-z=-500 \qquad x=2{,}750-y-2z$$

$$y-800=-500 \qquad x=2{,}750-300-2(800)=850$$

$$y=-500+800=300$$

La solución del sistema es (850, 300, 800) ¡Ésta es la solución a la propuesta de aprendizaje al inicio del bloque!

Resolución de un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas por determinantes

Para resolver un sistema de ecuaciones de 3 × 3 como el siguiente

$$ax + by + cz = A$$

$$dx + ey + fz = B$$

$$gx + hy + iz = C$$

vamos a calcular los determinantes $D,\ D_x,\ D_y,\ D_z$ y en seguida obtenemos los cocientes:

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D} \qquad z = \frac{D_z}{D}$$

que son la solución del sistema 3 × 3.

Para calcular el determinante D de un arreglo de 3 × 3, procederemos de la siguiente manera:

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Para calcular el determinante D_x se procede de manera análoga, pero se cambian los coeficientes de x: a, d y g por los términos independientes A, B y C; de la misma manera se obtienen D_y y D_z y, como consecuencia, y y z.

$$D_x = \begin{vmatrix} A & b & c \\ B & e & f \\ C & h & i \end{vmatrix} = A\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} B & f \\ C & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} B & e \\ C & h \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & A & c \\ d & B & f \\ g & C & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} B & f \\ C & i \end{vmatrix} - A\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & B \\ g & C \end{vmatrix}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a & b & A \\ d & e & B \\ g & h & C \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & B \\ h & C \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & B \\ g & C \end{vmatrix} + A\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Ejemplo de una aplicación

Una persona descubre que, para una adecuada nutrición diaria, necesita complementar sus alimentos con las siguientes cantidades de vitaminas: 50 mg de niacina, 50 mg de riboflavina y 50 mg de tiamina. La siguiente tabla menciona tres marcas de pastillas vitamínicas e indica las cantidades de vitaminas por pastilla. ¿Cuántas pastillas de cada marca debe tomar diariamente la persona en cuestión?

	Fortex	Fortísimo	Forteplus
Niacina (mg)	5	10	15
Riboflavina (mg)	15	20	0
Tiamina (mg)	10	10	10

Solución:

Llamemos x, y y z al número de pastillas diarias que debe tomar la persona, y diseñemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$5x + 10y + 15z = 50$$

$$15x + 20y + 0z = 50$$

$$10x + 10y + 10z = 50$$

Calculamos D, D_x, D_y y D_z.

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 15 & 20 & 0 \\ 10 & 10 & 10 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 20 & 0 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} + 15\begin{vmatrix} 15 & 20 \\ 10 & 10 \end{vmatrix}$$

$$D = 5(200-0) - 10(150-0) + 15(150-200) = -1{,}250$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 50 & 10 & 15 \\ 50 & 20 & 0 \\ 50 & 10 & 10 \end{vmatrix} = 50\begin{vmatrix} 20 & 0 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 50 & 0 \\ 50 & 10 \end{vmatrix} + 15\begin{vmatrix} 50 & 20 \\ 50 & 10 \end{vmatrix}$$

$D_x = 50(200-0) - 10(500-0) + 15(500-1{,}000) = -2{,}500$, por lo tanto,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2{,}500}{-1{,}250} = 2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 50 & 15 \\ 15 & 50 & 0 \\ 10 & 50 & 10 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 50 & 0 \\ 50 & 10 \end{vmatrix} - 50\begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} + 15\begin{vmatrix} 15 & 50 \\ 10 & 50 \end{vmatrix}$$

$D_y = 5(500-0) - 50(150-0) + 15(750-500) = -1{,}250$, por consiguiente,

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-1{,}250}{-1{,}250} = 1$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 50 \\ 15 & 20 & 50 \\ 10 & 10 & 50 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 20 & 50 \\ 10 & 50 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 15 & 50 \\ 10 & 50 \end{vmatrix} + 50\begin{vmatrix} 15 & 20 \\ 10 & 10 \end{vmatrix}$$

$D_z = 5(1{,}000-500) - 10(750-500) + 50(150-200) = -2{,}500$

por lo tanto,

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-2{,}500}{-1{,}250} = 2$$

La solución para el sistema es $(x, y, z) = (2, 1, 2)$ y significa que la dosis diaria debe ser 2 pastillas de Fortex, 1 de Fortísimo y 2 de Forteplus.

Evidencias de aprendizaje

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

1. $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y + 2z = 5 \\ x + y + 3z = 8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 4 \\ 4x + y - 3z = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+2y-z=-2 \\ x+z=0 \\ 2x-y-z=-3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} a+2b-c=9 \\ 2a-c=-2 \\ 3a+5b+2c=22 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x-3y-z=13 \\ -x+2y-5z=6 \\ 5x-y-z=49 \end{cases}$

Aplicaciones

1. Tres amigos gastaron cierta cantidad de dinero en un restaurante. La suma del gasto del primero y el segundo rebasa en $20 el gasto del tercero; la suma del gasto del primero y del tercero excede por $60 el gasto del segundo; por último, el segundo y el tercero gastaron juntos $100 más que el primero. ¿Cuánto gastó cada uno?

2. Rosa, Martha y María compiten en un torneo en el que deben correr, nadar o andar en bicicleta determinadas distancias. La rapidez promedio de cada una aparece en la siguiente tabla.

NOTA: Recuerda que el tiempo es igual al desplazamiento entre la velocidad.

	Rapidez promedio (mi/h)		
	Carrera	Natación	Ciclismo
Rosa	10	4	20
Martha	7.5	6	15
María	15	3	40

María llega primero, con un tiempo total de 1.75 horas; Rosa llega en segundo lugar, con un tiempo de 2.5 horas; y Martha llega al último con un tiempo de 3 horas. Calcula la distancia de cada parte de la competencia.

3. En una fábrica hay tres máquinas m_1, m_2 y m_3 para pulir lentes; cuando las tres máquinas están en operación, se pueden pulir 5,850 lentes en una semana. Cuando están en operación m_1 y m_2 únicamente, se pueden pulir 4,200 lentes a la semana. En cambio, cuando sólo trabajan m_1 y m_3, se pulen 3,450 lentes a la semana. ¿Cuántos lentes puede pulir cada máquina en una semana?

AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 8

Considera tu desempeño como estudiante e indica la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente

☹ **0** Nunca ㋡ **5** Algunas veces ☺ **10** Siempre

CONOCIMIENTOS Después de estudiar el bloque, ¿adquiriste los conocimientos que te permiten	
• comprender el método numérico por determinantes?	
• comprender el método numérico por sustitución?	
• ubicar e interpretar situaciones diversas utilizando sistemas de 3×3?	

HABILIDADES Al finalizar el bloque, ¿desarrollaste las habilidades que te permiten	
• obtener la solución de sistemas de ecuaciones de 3×3?	
• aplicar el método numérico por determinantes para resolver sistemas de 3×3?	
• utilizar el método de sustitución para resolver un sistema de 3×3?	
• representar y solucionar situaciones diversas utilizando sistemas 3×3?	
• expresar ideas y conceptos de sistemas de ecuaciones con tres incógnitas empleando representaciones en lenguaje común, simbólico o gráfico?	
• ejecutar instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye a resolver una ecuación de 3×3?	

CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 1.1. El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte respecto a las **actitudes** y los **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás al estudiar el tema.

BLOQUE 9

Ecuaciones cuadráticas I

Unidades de competencia

En este bloque se pretende que el alumno desarrolle las siguientes competencias:

- Construir e interpretar modelos aritméticos, algebraicos y gráficos aplicando las propiedades de los números positivos y las expresiones aritméticas y algebraicas, relacionando magnitudes constantes y variables, y empleando literales para la representación y resolución de situaciones y/o problemas aritméticos y algebraicos concernientes a su vida cotidiana y escolar, los cuales le ayudarán a explicar y describir su realidad.
- Identificar las características presentes en tablas, gráficas, mapas, diagramas o textos, provenientes de situaciones cotidianas, y traducirlas a un lenguaje aritmético y/o algebraico.

Conocimientos

Al finalizar este bloque, el alumno habrá adquirido los conocimientos que le permitirán:

- Comprender los métodos para resolver ecuaciones cuadráticas incompletas.
- Identificar ecuaciones incompletas de segundo grado en una variable.
- Ubicar e interpretar situaciones con ecuaciones cuadráticas incompletas.
- Comprender los métodos para resolver ecuaciones cuadráticas completas.
- Describir el procedimiento de completar y factorizar trinomios cuadrados perfectos para resolver ecuaciones completas de segundo grado en una variable.

- Identificar raíces reales y complejas, y escribir ecuaciones a partir de éstas.
- Ubicar e interpretar situaciones con ecuaciones cuadráticas completas.

Habilidades

Al finalizar este bloque, el alumno habrá desarrollado las habilidades que le permitirán:

- Obtener la solución de sistemas de ecuaciones cuadráticas.
- Aplicar técnicas algebraicas de despeje o extracción de un factor común.
- Resolver ecuaciones incompletas de segundo grado en una variable.
- Utilizar la técnica de completar y factorizar trinomios cuadrados perfectos para resolver ecuaciones completas de segundo grado.
- Representar y solucionar situaciones con ecuaciones cuadráticas.

Actitudes y valores

Al finalizar este bloque, el alumno:

- Apreciará la utilidad de los métodos específicos para resolver ecuaciones cuadráticas incompletas.
- Valorará la importancia de contar con un método algebraico para resolver todo tipo de ecuación cuadrática en una variable.
- Valorará la aplicabilidad de las ecuaciones cuadráticas para representar y resolver diversas situaciones.

Indicadores de desempeño

Se pretende que el alumno logre:

- Identificar situaciones en las que las magnitudes constantes o variables se relacionan mediante una función cuadrática.
- Resolver problemas que implican ecuaciones cuadráticas completas o incompletas, utilizando despejes o factorizaciones, o ambos.
- Identificar y comprobar las soluciones reales o complejas de ecuaciones cuadráticas equivalentes.

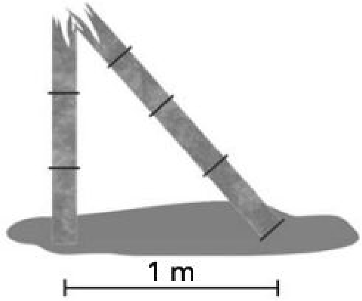
(Continúa)

- Identificar la forma $a+bi$ de los números complejos y la forma $a-bi$ de sus conjugados.
- Explicar por qué algunos resultados de ecuaciones cuadráticas son inadmisibles en el contexto de una situación.
- Extraer información de registros algebraicos o gráficos y utilizar la escala de equivalencia de unidades para realizar conversiones a medidas reales y viceversa.

Propuesta de aprendizaje

La situación descrita a continuación aparece en un libro de matemáticas chino titulado *Los nueve capítulos del arte matemático*, escrito aproximadamente 250 años a. C.

Un vástago de bambú de 3 metros de largo se rompe de forma tal que su punta toca el suelo a 1 metro de la base, como se muestra en la figura. ¿Es posible calcular la altura a la que se rompió el vástago?



Secuencia didáctica

- Traza un triángulo rectángulo semejante a la figura.
- Dale un nombre a la altura del triángulo.
- Consulta el teorema de Pitágoras.
- ¿Te parece familiar la expresión $x^2+1=(3-x)^2$?
- Resuelve en **equipo** la ecuación del paso anterior.

Propuesta de aprendizaje

Con la asesoría de un ingeniero en matemáticas, un comerciante determina que la utilidad U en dólares generada por las ventas de x artículos por semana está dada por la fórmula

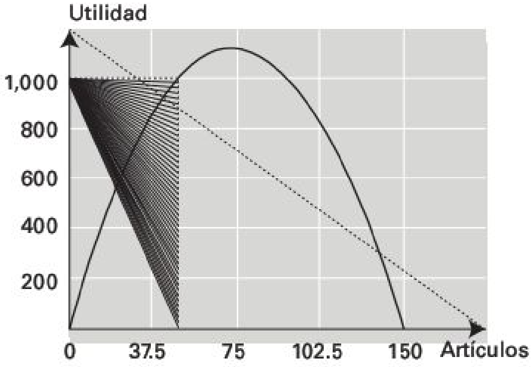
$$U = \frac{1}{5}x\,(150 - x)$$

siempre y cuando $0 \leq x \leq 75$. ¿Cuántos artículos debe vender el comerciante en una semana para obtener una utilidad de 1,000 dólares?

Secuencia didáctica

Trabajo en equipo

- Igualen a 1,000 la expresión de la utilidad.
- Resuelvan la ecuación resultante igualando a cero. La clave es encontrar 2 números que sumen -150 y que multiplicados produzcan $+5000$.
- Analicen la gráfica anexa y concluyan si corresponde a la situación que estamos estudiando.
- Si la gráfica representa la situación en cuestión, observa cuál es el valor de x para el que la utilidad es máxima.



Identificación de ecuaciones cuadráticas

En esta sección resolveremos situaciones donde se presenten problemas cuya solución implique ecuaciones de segundo grado con una incógnita, empleando para ello métodos algebraicos y analíticos para concluir si las soluciones son reales o imaginarias.

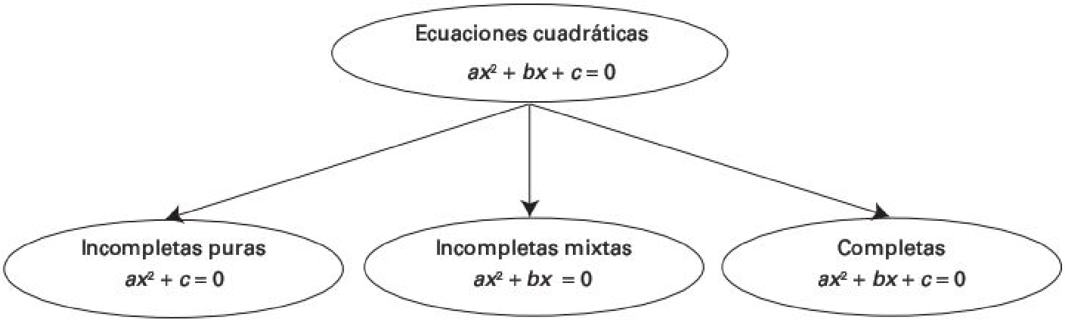
Ecuaciones cuadráticas o de segundo grado

Una ecuación cuadrática en x es una ecuación que puede escribirse en su forma estándar como

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales, y $a \neq 0$.

Clasificación de las ecuaciones cuadráticas



Propiedad del producto cero

$$ab = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0$$

Esta propiedad significa que si podemos factorizar el lado izquierdo de una ecuación, entonces la resolveremos igualando a cero cada uno de los factores.

Ejemplos:

1. **Ecuación cuadrática pura.** Resuelve la ecuación

$$x^2 - 5 = 0$$

Solución:

La ecuación $x^2 - 5 = 0$ se puede factorizar como una diferencia de cuadrados y, de esta forma, es fácil encontrar las soluciones.

Igualamos la ecuación a 0.	Factorizamos.	Igualamos cada factor a 0 y resolvemos para cada uno de ellos.
$x^2 - 5 = 0$	$\left(x + \sqrt{5}\right)\left(x - \sqrt{5}\right) = 0$	$x + \sqrt{5} = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{5}$ $x - \sqrt{5} = 0 \Rightarrow x_2 = +\sqrt{5}$

Comprobación:

Para $x = -\sqrt{5}$: $\quad \left(-\sqrt{5}\right)^2 - 5 = 0$

Para $x = \sqrt{5}$: $\quad \left(\sqrt{5}\right)^2 - 5 = 0$

2. Ecuación cuadrática mixta. Resuelve la ecuación

$$2x^2 - 4x = 0$$

Solución:

La ecuación $2x^2 - 4x = 0$ se puede factorizar como un factor común y, de esta forma, es fácil encontrar las soluciones.

Igualamos la ecuación a 0.	Factorizamos.	Igualamos cada factor a 0 y resolvemos para cada uno de ellos.
$2x^2 - 4x = 0$	$2x(x-2) = 0$	$2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$

Comprobación:

Para $x = 0$: $2(0)^2 - 4(0) = 0$

Para $x = 2$: $2(2)^2 - 4(2) = 0$

3. Ecuación cuadrática completa. Resuelve la ecuación

$$x^2 + 5x = 24$$

Solución:

La ecuación $x^2 + 5x = 24$ se puede factorizar como un trinomio cuadrado con un término común; así, será fácil encontrar las soluciones.

Igualamos la ecuación a 0.	Factorizamos.	Igualamos cada factor a 0 y resolvemos para cada uno de ellos.
$x^2 + 5x - 24 = 0$	$(x-3)(x+8)$	$x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$ $x + 8 = 0 \Rightarrow x_2 = -8$

Comprobación:

Para $x = 3$: $(3)^2 + 5(3) - 24 = 0$

Para $x = -8$: $(-8)^2 + 5(-8) - 24 = 0$

Evidencias de aprendizaje

Ejercicios

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones factorizando y completando el diagrama.

1. $x^2 + x = 30$

Igualamos la ecuación a 0.	Factorizamos.	Igualamos cada factor a 0 y resolvemos para cada uno de ellos.

2. $5x^2 - 75x = 0$

Igualamos la ecuación a 0.	Factorizamos.	Igualamos cada factor a 0 y resolvemos para cada uno de ellos.

3. $x^2 - x - 6 = 0$

Igualamos la ecuación a 0.	Factorizamos.	Igualamos cada factor a 0 y resolvemos para cada uno de ellos.

4. $x^2 - 3x = 0$

Igualamos la ecuación a 0.	Factorizamos.	Igualamos cada factor a 0 y resolvemos para cada uno de ellos.

5. $x^2 - 4 = 0$

Igualamos la ecuación a 0.	Factorizamos.	Igualamos cada factor a 0 y resolvemos para cada uno de ellos.

Aplicación

Se desea fabricar una caja con base cuadrada y sin tapa a partir de un trozo cuadrado de cartón, cortando cuadrados de 4 centímetros de lado en cada esquina y doblando los costados, como se muestra en la figura. La caja debe medir 256 centímetros cúbicos. ¿Cuál es el tamaño de la pieza de cartón para hacer la caja?

Solución:

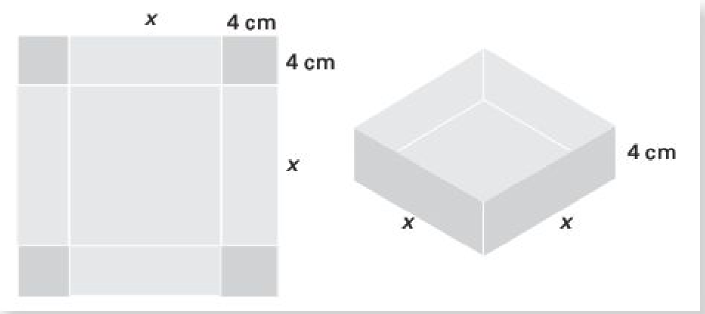
El volumen de la caja es el área de la base x^2 por la altura, que es igual a 4.

$$V = 4x^2 = 256$$

$$4x^2 = 256$$

$$x^2 = \frac{256}{4} = 64$$

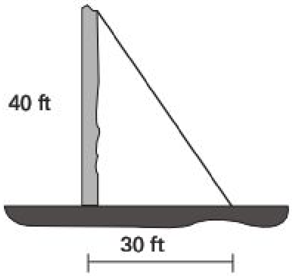
$$x = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$



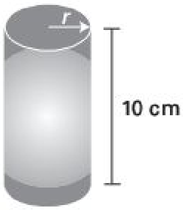
La pieza de cartón debe medir $8 + 4 = 12$ cm por lado.

Evidencias de aprendizaje

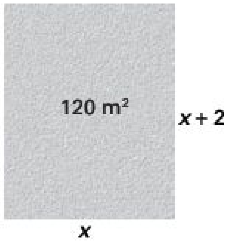
1. ¿Qué longitud tiene un alambre que se extiende desde la parte superior de un poste telefónico de 40 ft hasta un punto sobre el suelo a 30 ft del poste?



2. Una lata cilíndrica mide 90π centímetros cúbicos de volumen y 10 centímetros de altura. ¿Cuál es su radio? NOTA: La fórmula del volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$.



3. Un terreno rectangular mide 2 metros más de largo que de ancho. Su área es de 120 metros cuadrados. ¿Cuáles son sus dimensiones?



4. El cuadrado de cierto número positivo es 4 veces el mismo número más 5. Encuentra el número.

5. La suma de los cuadrados de dos enteros pares consecutivos es 52. Encuentra esos números.
Sugerencia: Considera que los números consecutivos son x y $x+2$.

Resolución de una ecuación cuadrática completando el trinomio cuadrado perfecto

Cuando una ecuación cuadrática no se puede factorizar fácilmente, podemos resolverla utilizando la técnica de *completar el cuadrado*. Esto significa sumar una constante a una expresión para convertirla en un cuadrado perfecto. Si tenemos la expresión x^2-4x y queremos un cuadrado perfecto, debemos de sumarle 4, ya que $x^2-4x+4=(x-2)^2$.

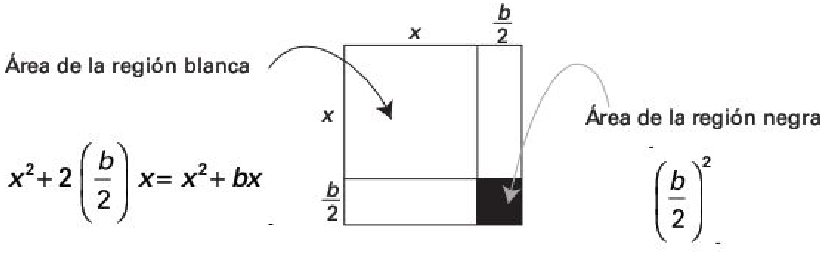
En general, a partir de la identidad

$$x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$$

se deduce que para hacer de x^2+bx un cuadrado perfecto, debemos sumar el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.

Completando el cuadrado perfecto

Para hacer de x^2+bx un cuadrado perfecto, basta con sumarle $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.



Para completar el cuadrado se agrega un pequeño cuadrado de área $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Ejemplos:

Utiliza el método de completar el cuadrado y resuelve las siguientes ecuaciones.

1. $x^2 - 8x + 13 = 0$

Solución:

Observa la siguiente secuencia para que comprendas la solución.

Escribe el término numérico a la derecha del signo igual.	Completa el cuadrado sumando el cuadrado de la mitad del coeficiente de x en ambos lados de la ecuación.	Resuelve la ecuación.
$x^2 - 8x = -13$	$x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = -13 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$ $x^2 - 8x + 16 = -13 + 16$ $(x-4)^2 = 3$	$(x-4)^2 = 3$ $x - 4 = \sqrt{3}$ $x = 4 \pm \sqrt{3}$

2. $2x^2 - 4x - 5 = 0$

Solución:

Observa la siguiente secuencia para que comprendas la solución.

Escribe el término numérico a la derecha del signo igual.	Factoriza el coeficiente de x^2 y completa el cuadrado dentro del paréntesis.	Resuelve la ecuación.
$2x^2 - 4x = 5$	$2(x^2 - 2x) = 5$ $2(x^2 - 2x + 1^2) = 5 + 1^2(2)$ $2(x-1)^2 = 7$	$(x-1)^2 = \frac{7}{2}$ $x - 1 = \sqrt{\frac{7}{2}}$ $x = 1 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$

Evidencias de aprendizaje

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones completando el cuadrado.

1. $x^2 - 4x + 2 = 0$

Escribe el término numérico a la derecha del signo igual.	Completa el cuadrado sumando el cuadrado de la mitad del coeficiente de *x* en ambos lados de la ecuación.	Resuelve la ecuación.

2. $x^2 - 6x - 9 = 0$

Escribe el término numérico a la derecha del signo igual.	Completa el cuadrado sumando el cuadrado de la mitad del coeficiente de *x* en ambos lados de la ecuación.	Resuelve la ecuación.

3. $2x^2 + 8x + 1 = 0$

Escribe el término numérico a la derecha del signo igual.	Factoriza el coeficiente de x^2 y completa el cuadrado dentro del paréntesis.	Resuelve la ecuación.

Resolución de ecuaciones cuadráticas con raíces complejas

Ejemplos:

1. Obtén la solución de la ecuación $x^2+1=0$.

Solución:

$x^2+1=0$

$x^2=-1$ Restamos 1 en ambos lados.

$x=\pm\sqrt{-1}$ Despejamos x.

Como en el campo de los números reales no existe ningún número que al elevarse al cuadrado produzca -1, concluimos que la solución no existe en este campo. Con el propósito de resolver todas las ecuaciones cuadráticas, se inventó un sistema numérico expandido: el sistema de los *números complejos*. Primero, se definió el número

$$i=\sqrt{-1}$$

De manera que $i^2=-1$. Por lo tanto, la estructura de un número complejo tiene una parte *real* y otra *imaginaria*:

$$\underbrace{a}_{\text{Parte real}}+\underbrace{bi}_{\text{Parte imaginaria}}$$

donde a y b son números reales e $i^2=-1$. La parte real de este número es a y la parte imaginaria es bi.

2. Resuelve la ecuación $x^2-6x+10=0$.

Solución:

$x^2-6x+10=0$

$(x-3)^2=-1$ Completamos el trinomio y factorizamos.

$x=\underbrace{3}_{\text{Parte real}}\pm\underbrace{\sqrt{-1}}_{\text{Parte imaginaria}}$ Despejamos x.

Estructura de una ecuación cuadrática a partir de soluciones reales y complejas

Ejemplo:

1. Escribe una ecuación a partir de las soluciones $x=3+\sqrt{-1}$ y $x=3-\sqrt{-1}$.

Solución:

Como $x=3+\sqrt{-1}$, por lo tanto, $x-3-\sqrt{-1}=0$.

Como $x=3-\sqrt{-1}$, por lo tanto, $x-3+\sqrt{-1}=0$.

Ambas expresiones son cero, por consiguiente, su producto también es cero.

$$\left(x-3-\sqrt{-1}\right)\left(x-3+\sqrt{-1}\right)=0$$

Desarrollamos este producto:

$$(x-3)^2-\left(\sqrt{-1}\right)^2=0$$

$$x^2-6x+9-(-1)=0$$

$$x^2-6x+10=0$$

Autoevaluación

A partir de las soluciones dadas, escribe la ecuación cuadrática correspondiente.

1. $x=+\sqrt{-1}$ y $x=-\sqrt{-1}$
2. $x=+2\sqrt{-1}$ y $x=-2\sqrt{-1}$
3. $x=2+\sqrt{-1}$ y $x=2-\sqrt{-1}$

AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 9

Considera tu desempeño como estudiante e indica la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

☹ **0** Nunca ☺ **5** Algunas veces ☺ **10** Siempre

CONOCIMIENTOS Después de estudiar el bloque, ¿adquiriste los conocimientos que te permiten	
• comprender los métodos para resolver ecuaciones cuadráticas incompletas?	
• identificar ecuaciones incompletas de segundo grado en una variable?	
• ubicar e interpretar situaciones con ecuaciones cuadráticas incompletas?	
• comprender los métodos para resolver ecuaciones cuadráticas completas?	
• describir el procedimiento de completar y factorizar trinomios cuadrados perfectos para resolver ecuaciones completas de segundo grado en una variable?	
• identificar raíces reales y complejas, y escribir ecuaciones a partir de éstas?	
• ubicar e interpretar situaciones con ecuaciones cuadráticas completas?	

HABILIDADES Al finalizar el bloque, ¿desarrollaste las habilidades que te permiten	
• obtener la solución de sistemas de ecuaciones cuadráticas?	
• aplicar técnicas algebraicas de despeje o extracción de un factor común?	
• resolver ecuaciones incompletas de segundo grado en una variable?	
• utilizar la técnica de completar y factorizar trinomios cuadrados perfectos para resolver ecuaciones completas de segundo grado?	
• representar y solucionar situaciones con ecuaciones cuadráticas?	

CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 0.83. El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte respecto a las **actitudes** y los **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás al estudiar el tema.

BLOQUE 10

Ecuaciones cuadráticas II

Arco parabólico en Saint Louis, Missouri, Estados Unidos.

Unidades de competencia

En este bloque se pretende que el alumno desarrolle las siguientes competencias:

- Construir e interpretar modelos aritméticos, algebraicos y gráficos aplicando las propiedades de los números positivos y las expresiones aritméticas y algebraicas, relacionando magnitudes constantes y variables, y empleando literales para la representación y resolución de situaciones y/o problemas aritméticos y algebraicos concernientes a su vida cotidiana y escolar, los cuales le ayudarán a explicar y describir su realidad.
- Identificar las características presentes en tablas, gráficas, mapas, diagramas o textos, provenientes de situaciones cotidianas, y traducirlas a un lenguaje aritmético y/o algebraico.

Conocimientos

Al finalizar este bloque, el alumno habrá adquirido los conocimientos que le permitirán:

- Identificar la relación entre funciones y ecuaciones cuadráticas.
- Reconocer la ecuación en dos variables $y = ax^2 + bx + c$ como la forma de la función cuadrática, y las ecuaciones en una variable $ax^2 + bx + c$ como casos particulares de la anterior.
- Escribir la función cuadrática en la forma estándar $y = a(x-h)^2 + k$ para trazar la gráfica.

- Comprender el efecto del parámetro a en el ancho y la concavidad de la parábola, y asociar las intersecciones con el eje x de ésta con las raíces de $ax^2+bx+c=0$.
- Interpretar la fórmula cuadrática.

Habilidades

Al finalizar este bloque, el alumno habrá desarrollado las habilidades que le permitirán:

- Resolver ecuaciones cuadráticas por métodos numéricos y gráficos.
- Representar y resolver situaciones mediante ecuaciones y funciones cuadráticas.
- Pasar de ecuaciones a funciones cuadráticas y viceversa, al representar y solucionar diversas situaciones.
- Ejecutar instrucciones y procedimientos propios de las ecuaciones cuadráticas de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye a alcanzar un objetivo.
- Describir el proceso para hallar las soluciones de una ecuación cuadrática mediante la fórmula general.
- Interpretar la naturaleza real o compleja de las raíces a partir del discriminante cuadrático.

Actitudes y valores

Al finalizar este bloque, el alumno:

- Valorará la importancia de la conexión entre funciones y ecuaciones cuadráticas para examinar y solucionar situaciones.
- Apreciará las representaciones gráficas de funciones cuadráticas como instrumento de análisis visual de su comportamiento.
- Apreciará la utilidad de la fórmula cuadrática y su discriminante para resolver ecuaciones cuadráticas completas con todo tipo de coeficientes y conocer la naturaleza de las raíces.

Indicadores de desempeño

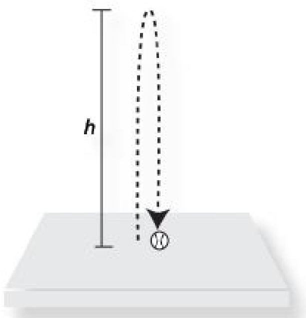
Se pretende que el alumno logre:

- Identificar situaciones donde las magnitudes constantes o variables se relacionan mediante una ecuación o una función cuadrática.
- Representar en los ejes vertical y horizontal las variables dependientes e independientes de la función cuadrática asociada a una ecuación cuadrática en una variable, y calcular una a partir de otra para tabular valores y trazar gráficas.
- Indicar la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática a partir del discriminante de la fórmula general.
- Resolver problemas que implican ecuaciones o funciones cuadráticas, utilizando despejes y/o factorización o la fórmula cuadrática, o bien, construyendo gráficas y visualizando posibles intersecciones con el eje x, ancho, concavidad y vértice de la parábola vertical.
- Explicar por qué algunos resultados de ecuaciones o valores de funciones cuadráticas son inadmisibles en el contexto del problema.
- Extraer información de registros algebraicos o gráficos y utilizar la escala de equivalencia de unidades para realizar conversiones a medidas reales y viceversa.

Propuesta de aprendizaje

Los físicos han encontrado que un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez de v_0 ft/seg alcanzará una altura de $h = -16t^2 + v_0 t$ ft después de t segundos.

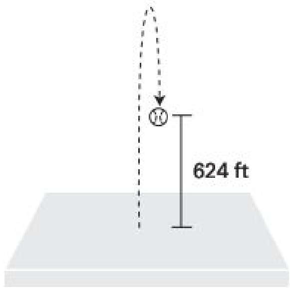
Supón que una pelota se lanza hacia arriba, con una rapidez inicial de 256 ft/seg. Observa la trayectoria en la figura. ¿En cuánto tiempo estará de regreso en el suelo?



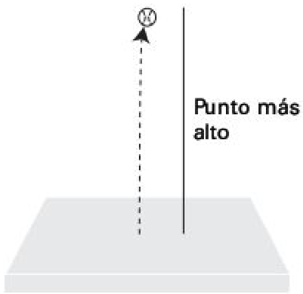
Secuencia didáctica

Trabajo en equipo

- En la ecuación dada por los físicos, sustituye v_0 por 256 ft/seg, y h por cero.
- Despeja t en la ecuación resultante.
- ¿Cuánto tarda la pelota en llegar a una altura de 624 ft? *Sugerencia*: Iguala la ecuación a 624 ft y resuelve.



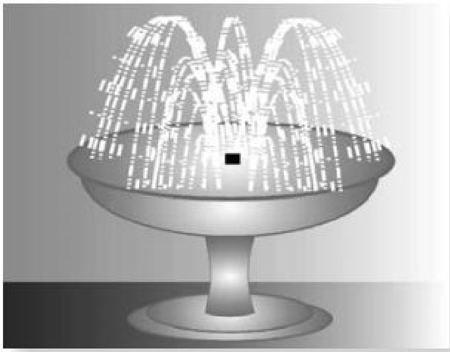
- ¿Qué tiempo tarda en alcanzar el punto más alto? *Sugerencia*: Considera la mitad del tiempo para regresar a su punto de partida.



- ¿Qué tiempo tarda en alcanzar una altura de 1,200 ft?
- Si algún resultado no es real, analiza el significado con el apoyo de tu maestro.

Relación entre la función y la ecuación cuadráticas

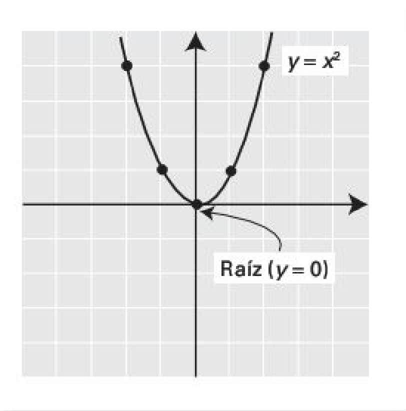
Sin duda habrás observado la trayectoria de un flujo de agua como el de una fuente. ¿Qué forma tiene? Esa trayectoria se conoce como **parábola** y corresponde a la gráfica de una ecuación que llamaremos **función cuadrática** y que tiene la forma $y = ax^2 + bx + c$. Esta ecuación puede graficarse al igual que la de la línea recta; es decir, asignamos valores a x para encontrar los valores correspondientes de y.



Cuando $y = 0$, obtenemos la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ que hemos venido estudiando hasta ahora.

La forma más sencilla de estas ecuaciones es $y = x^2$; aquí, $a = 1$, $b = 0$ y $c = 0$, y la gráfica se obtiene a partir de una tabla como la siguiente:

x	$y = -x^2$	(x, y)
-2	$(-2)^2 = 4$	$(-2,\ 4)$
-1	$(-1)^2 = 1$	$(-1,\ 1)$
0	$(0)^2 = 0$	$(0,\ 0)$
1	$(1)^2 = 1$	$(1,\ 1)$
2	$(2)^2 = 4$	$(2,\ 4)$

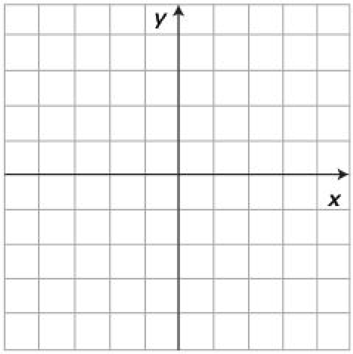


Se grafican los puntos (x, y) en el sistema coordenado y se dibuja una curva suave que pase por ellos. El resultado es la gráfica de la parábola mostrada en la figura contigua a la tabla. Por cierto, fíjate que tiene una sola raíz real o solución, el punto $(0,0)$.

Efecto del parámetro *a* en el ancho y la concavidad de la parábola

Ahora marca los puntos incluidos en la tabla que corresponden a la parábola $y = -x^2$ y observa detenidamente lo que ocurre con la gráfica.

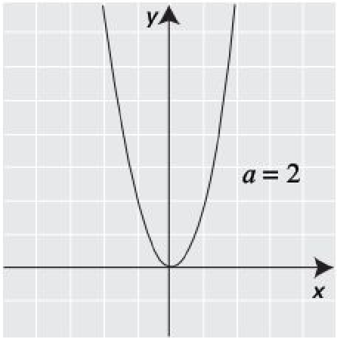
x	$y = -x^2$	(x, y)
-2	$-(-2)^2 = -4$	$(-2, -4)$
-1	$-(-1)^2 = -1$	$(-1, -1)$
0	$(0)^2 = 0$	$(0, 0)$
1	$-(1)^2 = -1$	$(1, -1)$
2	$-(2)^2 = -4$	$(2, -4)$



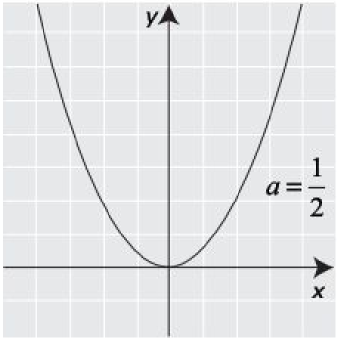
Tu conclusión debe ser que ahora la parábola abre hacia abajo; esto es porque $a < 0$. Por lo tanto, la gráfica de una ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola que

1. se abre hacia arriba si $a > 0$. **2.** se abre hacia abajo si $a < 0$.

Ahora reflexiona sobre lo que ocurre cuando *a* es un número entero y cuando *a* es una fracción.



$y = 2x^2$



$y = \frac{1}{2}x^2$

Como puedes ver, si a es un número entero, la gráfica se alarga verticalmente; si a es una fracción, la gráfica se alarga horizontalmente.

Forma estándar de la función cuadrática

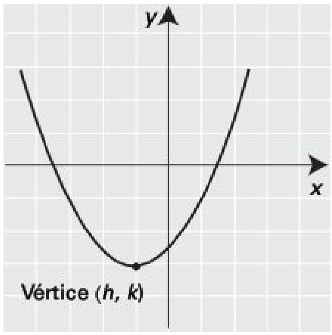
Para comprender la forma estándar u ordinaria de la *función cuadrática*, comparemos su ecuación $y = ax^2 + bx + c$ con el desarrollo de la expresión estándar $y = a(x-h)^2 + k$.

$$y = a(x-h)^2 + k$$

$$y = a(x^2 - 2xh + h^2) + k$$

$$y = ax^2 - 2ahx + (ah^2 + k)$$

$$y = ax^2 + (-2ah)x + (ah^2 + k)$$



Si igualamos las dos expresiones,

$$y = ax^2 + (-2ah)x + (ah^2 + k) = ax^2 + bx + c$$

Ahora hacemos $b = -2ah$ y $c = ah^2 + k$, y tenemos que

$$h = -\frac{b}{2a} \qquad \text{y} \qquad k = c - ah^2$$

Las coordenadas (h, k) son las coordenadas del vértice de la parábola y representan el punto mínimo o máximo, dependiendo de si la concavidad es hacia arriba o hacia abajo, respectivamente.

Ejemplo:

Escribe en su forma estándar la función cuadrática $y = 2x^2 - 4x + 3$.

Solución:

Aquí, $a = 2$, $b = -4$ y $c = 3$; por lo tanto,

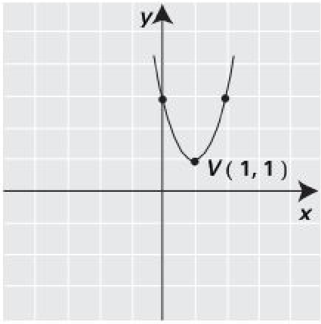
$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(2)} = 1 \quad \text{y}$$

$$k = c - ah^2 = 3 - 2(1)^2 = 1$$

El vértice de la parábola se ubica en $V(1,1)$. La parábola abre hacia arriba porque $a > 0$.

La forma estándar de la parábola es

$$y = 2(x-1)^2 + 1$$



$y = 2x^2 - 4x + 3$

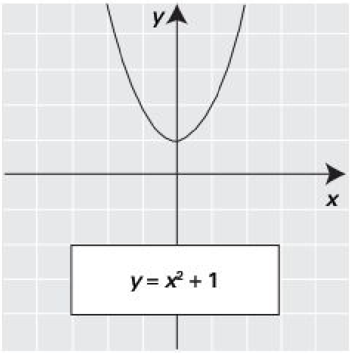
Para graficar, basta con evaluar la función en un valor menor que h y otro mayor. Por ejemplo:

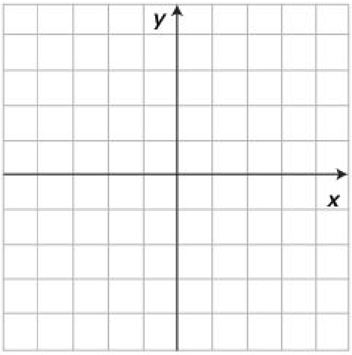
Si $x = 0$, entonces, $y = 2(0-1)^2 + 1 = 3$, por lo tanto, otro punto de la gráfica es $(0,3)$.

Si $x = 2$, entonces, $y = 2(2-1)^2 + 1 = 3$, por lo tanto, otro punto de la gráfica es $(2,3)$.

Evidencias de aprendizaje

1. Se nos da la gráfica de la función cuadrática $y = x^2 + 1$. Dibuja la gráfica de $y = -x^2 + 1$.



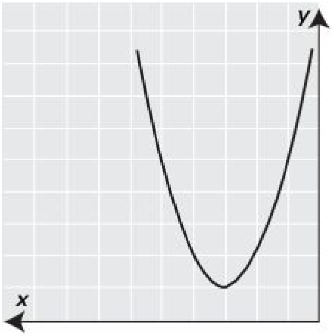


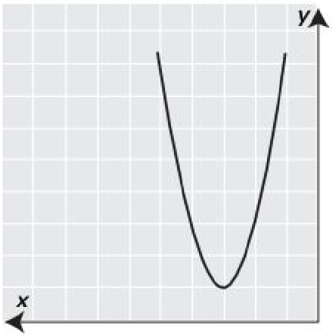
2. Asocia cada función con su gráfica y escríbela debajo del dibujo correspondiente.

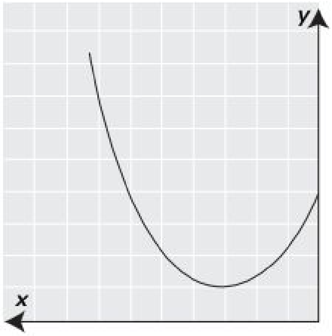
a) $y = x^2 + 6x + 10$

b) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 4$

c) $y = 2x^2 + 12x + 19$





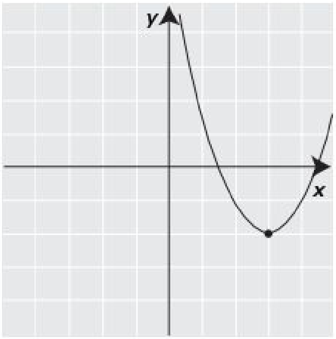


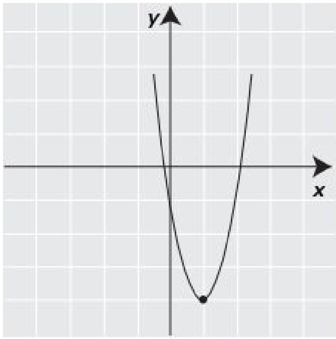
3. Asocia cada función con su gráfica y escríbela en la forma $y = ax^2 + bx + c$ debajo del dibujo correspondiente.

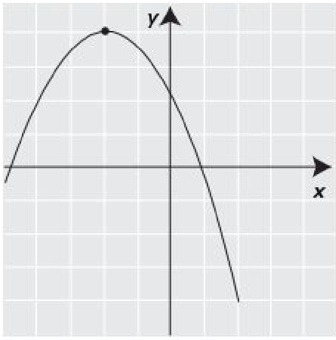
a) $y = 3(x-1)^2 - 4$

b) $y = (x-3)^2 - 2$

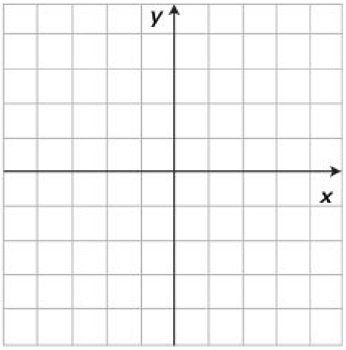
c) $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 4$



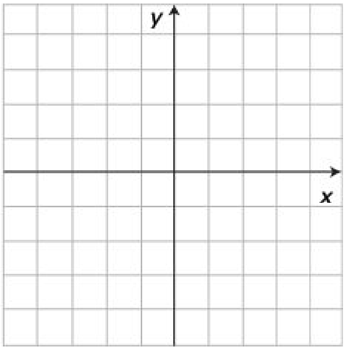




4. Dada la función $y = x^2 + 2x - 3$, escríbela en su forma $y = a(x - h)^2 + k$ y traza su gráfica.



5. Dada la función $y = 3 + 2x - x^2$, escríbela en su forma $y = a(x - h)^2 + k$ y bosqueja su gráfica.



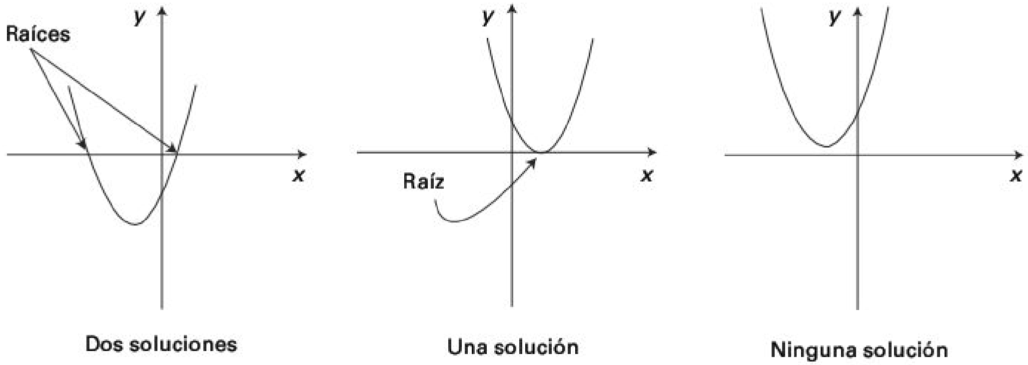
6. En un concurso para ver quién lanzaba más alto una pelota de béisbol, el ganador lanzó la bola con una velocidad vertical de 28 metros por segundo. Determina la altura máxima que alcanzó la pelota. *Sugerencia*: Utiliza la expresión $h = 5t^2 + v_0 t$.

Fernando Valenzuela

7. Se desea diseñar una fuente de forma que las gotas de agua alcancen una altura máxima de 10 metros en un tiempo de 2 segundos. ¿Cuál debe ser la velocidad de salida del agua? *Sugerencia*: Utiliza la expresión $h = 5t^2 + v_0 t$.

Raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

La siguiente figura nos ilustra que cuando una parábola corta dos veces el eje x tiene dos soluciones reales; cuando lo toca una sola vez, tiene una solución real; y cuando no lo cruza, no tiene solución. A estas soluciones se les llama raíces de la ecuación.



Interpretación de la fórmula cuadrática

La técnica de completar el trinomio cuadrado perfecto es muy útil porque nos sirve para obtener las raíces o soluciones de cualquier ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Veamos el procedimiento para determinar la fórmula que nos permita resolver cualquier ecuación cuadrática.

Partimos de la ecuación general

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Primero, pasamos la constante c al lado derecho y dividimos ambos lados de la ecuación entre a para obtener

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Ahora completamos el cuadrado sumando en ambos lados $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, que es el cuadrado de la mitad del coeficiente de x:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$ Cuadrado perfecto.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$ Simplificamos.

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Obtenemos la raíz cuadrada.

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Restamos $\frac{b}{2a}$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Simplificamos.

Fórmula cuadrática

Las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplos:

Determina las soluciones de cada ecuación.

1. $3x^2-5x-1=0$:

Solución:

Observa la secuencia de la siguiente tabla.

Identifica los valores de *a*, *b* y *c* en la ecuación.	Sustituimos *a*, *b* y *c* en la fórmula cuadrática.	Soluciones
$3x^2-5x-1=0$ $a=3,\ b=-5,\ c=-1$	$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(3)(-1)}}{2(3)}$ $x=\dfrac{5\pm\sqrt{25+12}}{6}$ $x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{6}$	$x=\dfrac{5+\sqrt{37}}{6}=1.8471$ $x=\dfrac{5-\sqrt{37}}{6}=0.18046$

2. $4x^2+12x+9=0$

Solución:

Identifica los valores de *a*, *b* y *c* en la ecuación.	Sustituimos *a*, *b* y *c* en la fórmula cuadrática.	Soluciones
$4x^2+12x+9=0$ $a=4,\ b=12,\ c=9$	$x=\dfrac{-12\pm\sqrt{(12)^2-4(4)(9)}}{2(4)}$ $x=\dfrac{-12\pm\sqrt{144-144}}{8}$ $x=\dfrac{-12}{8}$	$x=\dfrac{-12}{8}=-\dfrac{3}{2}$ En este caso, hay una solución.

3. $x^2 + 2x + 2 = 0$

Solución:

Identifica los valores de *a*, *b* y *c* en la ecuación.	Sustituimos *a*, *b* y *c* en la fórmula cuadrática.	Soluciones
$x^2 + 2x + 2 = 0$ $a = 1,\ \ b = 2,\ \ c = 2$	$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$ $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$ $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$	$x = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2}$ $x = -1 \pm \sqrt{-1}$ La solución no existe en los números reales.

Siempre que resolvamos una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, es conveniente observar bien el término $b^2 - 4ac$, que en matemáticas se llama **discriminante**. Como en los tres ejemplos que acabamos de ver, si $b^2 - 4ac > 0$, existen dos soluciones; si $b^2 - 4ac = 0$, hay una sola solución; y si $b^2 - 4ac < 0$, no hay solución en el campo de los números reales y el resultado se llama *solución imaginaria*. Resumamos lo anterior.

Discriminante

El discriminante de la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$ es $D = b^2 - 4ac$ y se comporta de la siguiente manera:

1. Si $D > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales.
2. Si $D = 0$, la ecuación tiene una solución real.
3. Si $D < 0$, la ecuación no tiene solución real.

Aplicaciones

Una institución financiera garantiza que por cada \$1,000 de inversión, sus clientes recibirán \$1,210 al final de 2 años. ¿Cuál es la tasa de interés si se capitaliza anualmente? *Sugerencia*: Utiliza la fórmula $A = P(1+i)^2$ donde $A = 1{,}210$ y $P = 1{,}000$.

Solución:

Sustituimos $1,210 = 1,000\,(1+i)^2$, por consiguiente,

$$(1+i)^2 = \frac{1,210}{1,000} = 1.2$$

$1+i = \sqrt{1.2}$, por lo tanto, $i = \sqrt{1.2} - 1 = 0.095$

La tasa de interés es del 9.5% anual.

Evidencias de aprendizaje

Para cada ecuación determina las soluciones reales, si es que las hay.

1. $x^2 - 2x - 8 = 0$

Identifica los valores de *a*, *b* y *c* en la ecuación.	Sustituimos *a*, *b* y *c* en la fórmula cuadrática.	Soluciones

2. $x^2 + 12x + 27 = 0$

Identifica los valores de *a*, *b* y *c* en la ecuación.	Sustituimos *a*, *b* y *c* en la fórmula cuadrática.	Soluciones

3. $2x^2 + 7x + 3 = 0$

Identifica los valores de *a*, *b* y *c* en la ecuación.	Sustituimos *a*, *b* y *c* en la fórmula cuadrática.	Soluciones

4. $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$

Identifica los valores de *a*, *b* y *c* en la ecuación.	Sustituimos *a*, *b* y *c* en la fórmula cuadrática.	Soluciones

5. $2x^2 - 9x - 5 = 0$

Identifica los valores de *a*, *b* y *c* en la ecuación.	Sustituimos *a*, *b* y *c* en la fórmula cuadrática.	Soluciones

Aplicaciones

1. Un objeto se deja caer desde una altura de 320 metros. ¿Cuántos segundos tardará en llegar a la superficie?

2. El cuadrado de cierto número positivo es 4 veces el mismo número más 5. Encuentra el número.

3. Un objeto se arroja hacia abajo con una velocidad inicial de 3 metros por segundo, ¿cuánto tiempo tardará en recorrer 8 metros?

AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 10

Considera tu desempeño como estudiante e indica la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente

☹ **0** Nunca ☺ **5** Algunas veces ☺ **10** Siempre

CONOCIMIENTOS Después de estudiar el bloque, ¿adquiriste los conocimientos que te permiten	
• identificar la relación entre funciones y ecuaciones cuadráticas?	
• reconocer la ecuación en dos variables $y = ax^2 + bx + c$ como la forma de la función cuadrática, y las ecuaciones en una variable $ax^2 + bx + c$ como casos particulares de la anterior?	
• escribir la función cuadrática en la forma estándar $y = a(x-h)^2 + k$ para trazar la gráfica?	
• comprender el efecto del parámetro a en el ancho y la concavidad de la parábola, y asociar las intersecciones con el eje x de ésta con las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$?	
• interpretar la fórmula cuadrática?	

HABILIDADES Al finalizar el bloque, ¿desarrollaste las habilidades que te permiten	
• resolver ecuaciones cuadráticas por métodos numéricos y gráficos?	
• representar y resolver situaciones mediante ecuaciones y funciones cuadráticas?	
• pasar de ecuaciones a funciones cuadráticas y viceversa, al representar y solucionar diversas situaciones?	
• ejecutar instrucciones y procedimientos propios de las ecuaciones cuadráticas de manera reflexiva?	
• describir el proceso para hallar las soluciones de una ecuación cuadrática mediante la fórmula general?	
• interpretar la naturaleza real o compleja de las raíces a partir del discriminante cuadrático?	

CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 0.9. El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte respecto a las **actitudes** y los **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás al estudiar el tema.

Registro personal de avance y aprovechamiento

Nombre del alumno: ______________________

Grupo: __________ Turno: __________

Actividad	Valor	Porcentajes por bloque										Calificaciones	
		B-1	B-2	B-3	B-4	B-5	B-6	B-7	B-8	B-9	B-10	Parciales	Final
Tareas													
Trabajo colaborativo													
Autoevaluación y coevaluación													
Exámenes objetivos													
Total	**100%**												

Fórmulas matemáticas

ÁLGEBRA

OPERACIONES ARITMÉTICAS			
$a(b+c) = ab + ac$	$\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$	$\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$	$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$

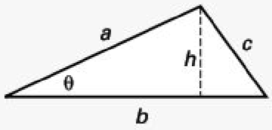
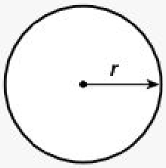
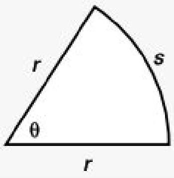
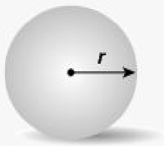
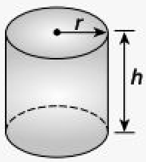
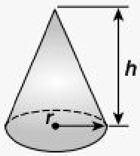
EXPONENTES Y RADICALES			
$a^m a^n = a^{mn}$	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(a^m)^n = a^{mn}$	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
$(ab)^n = a^n b^n$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$	$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$		$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	

FACTORIZACIONES ESPECIALES		
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

PRODUCTOS NOTABLES	
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Teorema del binomio $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$ donde $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ y $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)n$	

FÓRMULA CUADRÁTICA	VALOR ABSOLUTO
Si $ax^2 + bx + c = 0$, la solución para x es $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Para toda $a > 0$, entonces $\lvert x\rvert = a$ significa que $x = a$ o $x = -a$ $\lvert x\rvert < a$ significa que $-a < x < a$ $\lvert x\rvert > a$ significa que $x > a$ o $x < -a$

GEOMETRÍA BÁSICA

FIGURAS GEOMÉTRICAS ELEMENTALES		
Triángulos $Área = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ab \text{ sen } \theta$ 	**Círculos** $Área = \pi r^2$ $Perímetro = 2\pi r$ 	**Sector de círculos** $Área = \frac{1}{2}r^2\theta \quad s = r\theta$ 
Esfera $Volumen = \frac{4}{3}\pi r^3$ $Área = 4\pi r^2$ 	**Cilindro** $Área = 2\pi rh + 2\pi r^2$ $Volumen = \pi r^2 h$ 	**Cono** $Volumen = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ 

El contenido temático de este libro está diseñado para cumplir con los requisitos de un curso de matemáticas básicas, en lo que respecta a los conceptos de álgebra, de acuerdo con el plan de estudios del Bachillerato General.

Este libro se enfoca fundamentalmente en el desarrollo de las **competencias** que deben caracterizar a un estudiante del nivel medio superior, como eje principal en su formación educativa. De esta forma, la presente obra contribuye a desarrollar los conocimientos, las habilidades, las actitudes y los valores que distinguirán al alumno al concluir el estudio de la asignatura de ***Matemáticas I*** y que perdurarán a lo largo de su vida.

Además esta obra servirá para apoyar y facilitar la gran tarea que realizan los docentes durante el curso para desarrollar y ejecutar una mejor planeación de los materiales didácticos, en función del tiempo y de las necesidades institucionales y sociales. Este libro, sin duda, ayudará tanto a los profesores como a los alumnos a cosechar los mejores frutos de su trabajo.

Prentice Hall
es una marca de
PEARSON

Visítenos en:
www.pearsoneducacion.net

ISBN 978-607-32-0311-1